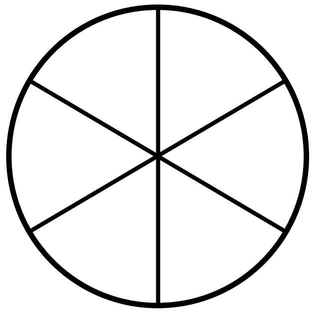
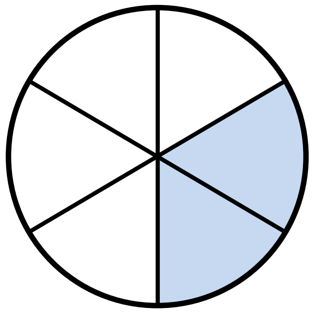
Bråk

Introduktion



Figuren till höger föreställer en tårta som är delad i sex lika stora bitar. Varje tårtbit utgör därmed *en sjättedel* av hela tårtan.

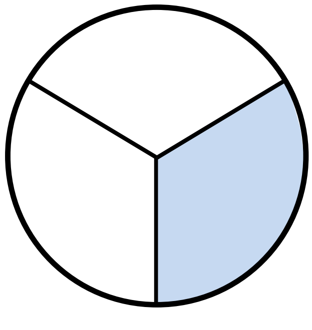


I nästa figur är två av sjättedelarna markerade. Det gäller nu att finna ett ändamålsenligt sätt att skriva ”två sjättedelar”.
”Två” skriver man förstås 2. ”Sjättedelar” skriver man lämpligen genom att att man anger hur många lika stora delar tårtan delades ifrån början, alltså 6.
Därmed skulle alltså ”två sjättedelar” skrivas ”2 6”, men med det skrivsättet är det lätt att tro att det är talet 26 som avses. För att undvika missförstånd introducerade man för länge sedan ett *bråkstreck*, som fick stå mellan antalet delar, alltså 2, och ”delsorten”, alltså sjättedelar som ju betecknades med siffran 6. Alltså skriver man 2/6 då man avser ”två sjättedelar”.

Först anges alltså *antalet delar*, i fallet ovan 2. Efter bråkstrecket följer så ”delsorten”, som ju i exemplet ovan betecknas med 6. Med tiden började man skriva det sneda bråkstrecket rakt. ”Två sjättedelar” skrivs därmed $\frac{2}{6}$. Ovanför bråkstrecket står alltså antalet delar eller *täljaren*. Under bråkstrecket anges vilken ”delsort” det är fråga om. Istället för ”delsorten” säger man *nämnaren*. Ett *bråk* består alltså av en täljare och en nämnare med ett bråkstreck mellan dem.

Om sju personer skulle dela rättvist på tårtan ovan, så att alla fick lika stora bitar, så blir ju förstås tårtbitarna ”Två sjundedelar” skrivs förstås 2/7 eller $\frac{2}{7}$. För den som inte är van vid bråk kan det tyckas motsägelsefullt att $\frac{2}{7}$ är mindre mängd tårta än $\frac{2}{6}$, trots att $\frac{2}{7}$ innehåller talet 7, som är större än talet 6. Men om man håller i minnet vad nämnaren står för, alltså hur många lika stora bitar tårtan är delat i, så är det lättare att förstå.

Omvandlingar



I figuren till höger är tårtan indelad i tredjedelar. En av tredjedelarna är markerad. Jämför vi med någon av figurerna ovan, så ser vi att en tredjedel är lika mycket som två sjättedelar. Alltså gäller att $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Nämnaren 6 är större än nämnaren 3. Men samtidigt är en sjättedel hälften så stor som en tredjedel. Alltså behövs det två sjättedelar för att det ska bli lika mycket som en tredjedel.

Mer allmänt kan man konstatera att om man gör nämnaren till ett bråk dubbelt så stor, så blir delarna hälften så stora. Alltså måste man även fördubbla täljaren för att det nya bråket ska bli lika stort. Man kan fortsätta resonemanget genom att man tänker sig att nämnaren blir tre gånger större. Då blir alltså delarna tre gånger mindre. Antalet delar måste då tredubblas för att det nya bråket ska bli lika stort. Osv.

Vi kan exemplifiera genom att utgå från bråket $\frac{4}{9}$. Detta bråk kan omvandlas på det sätt som beskrivits ovan och vi erhåller då

$$\frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{8}{18},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 9} = \frac{12}{27},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{16}{32},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 9} = \frac{20}{45} \text{ osv.}$$

Att antalet delar, alltså täljaren, ökar då man ökar nämnaren, alltså då man går över till en mindre delsort, är inte märkvärdigare än när man omvandlar sorter i andra sammanhang. Exempelvis är ju 2 meter detsamma som 20 decimeter. En decimeter är en tio gånger mindre längdsort än en meter och därmed behöver alltså antalet tiodubblas för att längden ska bli densamma.

Omvandlingen av bråk går alltså till så, att man multiplicerar täljaren och nämnaren *med samma tal*. Detta kallas för att man *förlänger* bråket. Man kan förlänga ett bråk med vilket tal som helst. Oftast skriver man inte ut med vilket tal man multiplicerar täljaren och nämnaren med. Sålunda skrivs det sista av exemplen ovan på detta sätt.

$$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$

Att bråket är förlängt med talet 5 är ju lätt att inse utan närmare förtydligande.

Naturligtvis kan likheten ovan vändas och skrivas

$$\frac{20}{45} = \frac{4}{9}.$$

Istället för att multiplicera har vi här *dividerat* täljaren och nämnaren i bråket $\frac{20}{45}$ med talet 5 och därmed erhållit $\frac{4}{9}$. Att dividera täljaren och nämnaren med samma tal kallas för att man *förkortar* bråket.

Förlänga ett bråk kan man göra med vilket tal som helst, men förkorta kan man bara göra om man finner ett tal *man kan dividera både täljaren och nämnaren med*.

Addition och subtraktion

Man kan undra när man behöver förlänga eller förkorta bråk. Vi börjar med ett exempel som inte har med bråkräkning att göra, men som ändå är belysande.

Antag att vi ska addera sträckan 3 meter och sträckan 2 decimeter. Vi ska alltså utföra additionen

$$3\text{ m}+2\text{ dm}.$$

Att vi inte kan lägga ihop talen 3 och 2 är uppenbart, eftersom vi har att göra med två olika längdsorter. Additionen kan utföras först sedan vi omvandlat meter och decimeter till en gemensam längdsort. Det finns många olika längdsorter att välja på, men låt oss denna gång välja centimeter. Därmed ser beräkningen ut på följande sätt.

$$3\text{ m}+2\text{ dm}=300\text{ cm}+20\text{ cm}=320\text{ cm}.$$

Eftersom centimeter är en hundra gånger mindre längdsort än meter så måste antalet centimeter i gengäld bli hundra gånger fler än antalet meter. Centimeter är en tio gånger mindre sort än decimeter och därmed måste antalet centimeter bli tio gånger större än antalet decimeter. Det hade förstås gått bra att omvandla till någon annan gemensam längdsort, exempelvis millimeter, innan additionen utfördes. Det viktiga är alltså att man först omvandlar till en *gemensam* sort.

Men om man har i minnet att täljaren kan tolkas som ”antalet delar” och nämnaren som ”delsorten” är det lätt att förstå bråkaddition. Vi börjar med exemplet

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{9}.$$

Eftersom bråken har olika nämnare (”delsorter”), kan vi inte utan vidare addera täljarna (”antalen”). Det gäller först att finna en gemensam nämnare (”delsort”).

Vi kan exempelvis först förlänga $\frac{3}{4}$ med 9 och $\frac{2}{9}$ med 4. Då erhåller vi följande.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{9}=\frac{27}{36}+\frac{8}{36}=\frac{35}{36}.$$

Även vid subtraktion av bråk krävs gemensam nämnare.

$$\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{15}{24}-\frac{8}{24}=\frac{7}{24}.$$

Vi fortsätter med ett mer komplicerat exempel.

$$\frac{7}{12}+\frac{11}{15}-\frac{5}{18}.$$

Här är det knepigare att hitta en gemensam nämnare. Men om vi förlänger det första bråket med $15\cdot 18=270$, det andra bråket med $12\cdot 18=216$ och det tredje bråket med $12\cdot 15=180$ erhåller vi

$$\frac{7}{12}+\frac{11}{15}-\frac{5}{18}=\frac{1890}{3240}+\frac{2376}{3240}-\frac{900}{3240}=\frac{3366}{3240}.$$

(Kontrollera räkningarna ovan!)

Den gemensamma nämnaren utgörs av ett stort och otympligt tal, dvs. vi har att göra med en otympligt liten delsort. Det är därmed lämpligt att försöka finna ett tal man kunde förkorta resultatet med. Det är kanske inte så lätt, men man kan ta det i etapper. Man ser tex. att både

täljaren och nämnaren består av jämna tal och därmed kan man ju till att börja med förkorta med 2. Fortsätter man att förkorta så långt det är möjligt, erhåller man till sist $\frac{187}{180}$.
(Kontrollera detta!)

Minsta gemensamma nämnare

Härmed kommer ett exempel på hur man kan undvika alltför stora nämnare och därmed även stora täljare, då man adderar och subtraherar bråk. Det är ju svårare att räkna med stora tal än med små tal.

Nämnarna i exemplet ovan utgjordes av talen 12, 15 och 18.

Vi börjar med att dela upp varje nämnare i *primtal*. Det innebär att vi delar upp nämnarna med räknesättet multiplikation så långt som möjligt, men vi håller oss till hela tal.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\ \ 15 = 3 \cdot 5 \text{ och } \ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Vi ser att talen 2, 3 och 5 förekommer i dessa uppdelningar.

- Talet 2 förekommer *två* gånger i uppdelningen av 12, ingen gång i uppdelningen av 15 och en gång i uppdelningen av 18. Den nämnare vi nu söker, den *minsta gemensamma nämnaren,* ska därmed innehålla *två* tvåor.
- Talet 3 förekommer en gång i uppdelningen av 12, en gång i uppdelningen av 15, men *två* gånger i uppdelningen av 18. Därmed ska den minsta gemensamma nämnaren även innehålla *två* treor.
- Talet 5 förekommer ingen gång i 12, *en* gång i 15 och ingen gång i 18. Den minsta gemensamma nämnaren ska därmed innehålla *en* femma.

Det är nu dags att bilda den minsta gemensamma nämnaren, MGN.

$$\text{MGN} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180.$$

En ny fråga inställer sig omedelbart, nämligen vad man ska förlänga de ursprungliga bråken med för att få nämnaren 180. Ett enkelt sätt att finna svaret på denna fråga är att jämföra uttrycket för MGN, alltså $\text{MGN} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, med uttrycken för de olika nämnarna, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ och $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Vi ser att MGN innehåller *en trea* och *en femma*, utöver vad 12 innehåller.
Därmed ska det första bråket, $\frac{7}{12}$, förlängas med $3 \cdot 5 = 15$ osv.
Genomför man uträkningen på detta sätt erhåller man

$$\frac{7}{12} + \frac{11}{15} - \frac{5}{18} = \frac{105}{180} + \frac{132}{180} - \frac{50}{180} = \frac{187}{180}.$$

Multiplikation

Vi börjar med ett exempel som inte handlar om bråk.
En rektangel har längden 5 meter och bredden 3 meter. Vi ska beräkna dess area.

3 m

5 m

Arean får vi genom att multiplicera rektangelns längd med dess bredd. Arean är alltså 15 kvadratmeter. Man bör observera att figurens mått inte bara är ”5 och 3”, utan 5 *meter* och 3 *meter*. För att få arean ska man dels multiplicera de givna antalen 3 och fem och därmed erhålla 15. Areasorten erhåller man genom att även multiplicera sorten för längden med sorten för bredden, alltså *meter gånger meter*.
Matematiskt ser uträkningen ut på följande sätt.

$$5\ \mathrm{m} \cdot 3\ \mathrm{m} = 5 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = 15\ \mathrm{m}^2 .$$

Man ska alltså multiplicera antalen i måttangivelserna för att få fram areans storlek, men även sorterna ska multipliceras med varandra. Detta gäller allmänt när man utgår från uppmätta storheter. Om man tex. kopplar in en elektrisk apparat som drar effekten 3 kW (kilowatt) under 2 h (timmar) blir energiförbrukningen

$$3\ \mathrm{kW} \cdot\ 2\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{kW} \cdot \mathrm{h} .$$

Sorten $\mathrm{kW} \cdot \mathrm{h}$ skrivs enklare kWh och kallas kilowattimmar.

På motsvarande sätt räknar man även multiplikation mellan bråk. Man multiplicerar ”antal och antal” med varandra, allså täljare och täljare, för att erhålla det nya ”antalet”, dvs. den nya täljaren. Vidare multiplicerar man den ena bråkets ”delsort”, alltså dess nämnare, med det andra bråkets ”delsort”, alltså dess nämnare, för att erhålla produktens ”delsort”, alltså nämnaren hos bråkens produkt. Här följer ett exempel.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40} .$$

Man behöver alltså inte finna någon gemensam nämnare vid bråkmultiplikation. Att multiplicera bråk upplever många därmed som enklare än att addera och subtrahera bråk.

Vi ska nu se på produkten av två andra bråk.

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{49}{77} = \frac{6 \cdot 49}{15 \cdot 77} = \frac{294}{1155} .$$

Efter en stunds funderingar inser man att det erhållna bråket kan förkortas till $\frac{14}{55}$. Det hade emellertid varit betydligt enklare att genomföra förkortning innan bråken multiplicerades. Det första bråket kan förkortas med 3 och det andra bråket med 7. Hade man gjort så, så hade räkningarna sett ut på följande sätt.

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{49}{77} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{55} .$$

Vi tittar nu på följande exempel.

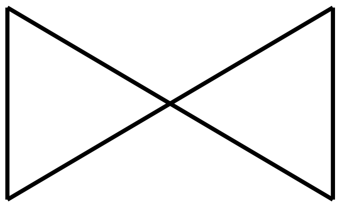
$$\frac{6}{77} \cdot \frac{49}{15}.$$

Här kan man inte förkorta varken det första eller det andra bråket. Genomför vi multiplikationen erhåller vi

$$\frac{6}{77} \cdot \frac{49}{15} = \frac{6 \cdot 49}{77 \cdot 15} = \frac{294}{1155}.$$

Resultatet känner vi igen och vet att det kan förkortas till $\frac{14}{55}$. Därav inser man att man även här kan förkorta innan man multiplicerar genom att dividera *det ena bråkets täljare och det andra bråkets nämnare* med samma tal. Så kan man alltså bara göra när det gäller *multiplikation* av bråk och *inte* vid addition eller subtraktion!

Följande lilla figur kan tjäna som stöd för minnet när det gäller hur man kan förkorta vid bråkmultiplikation.



Man kan alltså förkorta ”vertikalt” i något av bråken och man kan dessutom förkorta ”snett”.

Division

Division kan man säga är omvändningen till multiplikation. Vi börjar med att betrakta ett exempel med hela tal. Vi utgår från talet 7 och multiplicerar det med 3. Alltså

$$7 \cdot 3 = 21.$$

Om vi nu utgår från resultatet 21 och vill ha tillbaka talet 7, så får vi dividera 21 med 3. Därmed kan man alltså säga att multiplikation och division är varandras motsatser; multiplikation med 3 åtföljd av division med 3 ger oss det ursprungliga talet 7 tillbaka.

Låt oss nu utgå från ett bråk som vi först multiplicerar med ett annat bråk. Vi väljer följande exempel.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}.$$

För att få tillbaka $\frac{3}{8}$ ska vi dividera $\frac{15}{56}$ med $\frac{5}{7}$. Men om vi istället *multiplicerar* $\frac{15}{56}$ med $\frac{7}{5}$ får vi

$$\frac{15}{56} \cdot \frac{7}{5} = \frac{105}{280} = \frac{3}{8}.$$

Istället för att dividera med $\frac{5}{7}$ kunde vi alltså multiplicera med ”det uppochnedvända bråket” $\frac{7}{5}$. Att kasta om täljaren och nämnaren i ett bråk på ovanstående sätt kallas för att man *inverterar* bråket. Tekniken att utföra bråkdivision är alltså den att man istället *multiplicerar med inverterade värdet* av det bråk man ska dividera med. Här följer ännu ett exempel.

$$\frac{\frac{5}{9}}{\frac{11}{8}}$$

Vi ska alltså dividera bråket $\frac{5}{9}$ med bråket $\frac{11}{8}$. Det långa bråkstrecket står som divisionstecken. Man kan dock betrakta hela uttrycket som ett bråk, där täljaren i sig är ett bråk och även nämnaren i sig är ett bråk. Man brukar kalla uttryck av detta slag för *dubbelbråk*. Men nu övergår vi till att beräkna bråkdivisionen och utnyttjar att man istället för att ”räkna division” kan multiplicera dubbelbråkets täljare med det inverterade värdet av dess nämnare. Alltså erhåller vi

$$\frac{\frac{5}{9}}{\frac{11}{8}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{11} = \frac{40}{99}.$$

Några kluriga beteckningssätt

- Heltal kan betraktas som bråk med nämnaren 1. Exempelvis kan 3 även skrivas $\frac{3}{1}$.
- Ibland skriver man inte ut tecknet för multiplikation. Ett exempel på detta är att oftast skriver man $7x$ istället för $7 \cdot x$. Med när man skriver $4\frac{6}{7}$ är det ett plustecken som är utelämnat och man avser alltså $4 + \frac{6}{7}$. Skulle uttrycket innehålla ett okänt tal avses istället multiplikation med det utelämnade tecknet! Alltså $4\frac{x}{7} = 4 \cdot \frac{x}{7}$.
- Ska man beräkna $5 \cdot \frac{4}{27}$ så ska bara täljaren i bråket $\frac{4}{27}$ multipliceras med 5! Man kan förstå detta genom att tänka på olika sätt. Multiplicerar man med 5, så ska man ju göra bråket $\frac{4}{27}$ fem gånger större. Täljaren kan ju tolkas som antalet delar och bråket blir alltså fem gånger större om antalet delar femdubblas. Skulle man multiplicera både täljaren och nämnaren med 5, så förlänger man ju bråket och dess värde ändras därmed inte. Ett annat synsätt är att skriva 5 som $\frac{5}{1}$. Då kan multiplikationen skrivas $5 \cdot \frac{4}{27} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{27}$.