Grupper och ringar

Vi utgår från mängden $\mathbf{N}_{10}$ och den binära operationen $\oplus$. ’

- Det finns ett element, $[0]$, i $\mathbf{N}_{10}$ som är neutralt då man använder den binära operationen $\oplus$.
- Alla element i $\mathbf{N}_{10}$ har en invers med avseende på $\oplus$.

Om man använder $\oplus$ upprepade gånger så kan man göra på följande sätt.

$$\underbrace{[2]\oplus[5]}_{\text{Räknas först}}\oplus[7]=[7]\oplus[7]=[4].$$

Men man kan lika gärna tänka så här.

$$[2]\oplus\underbrace{[5]\oplus[7]}_{\text{Räknas först}}=[2]\oplus[2]=[4].$$

I sista raden ovan är $[5]$ och $[7]$ ”ihopräknade” först, medan $[2]$ har ”sparats”. Observera att elementen fortfarande står *i samma ordning*. (Elementen är alltså inte omkastade.) Det enda som gjorts är att man grupperat olika under uträkningarna. Att gruppera element på detta sätt kallas egentligen för att **associera**. Som man kan se, så ändras inte resultatet när man associerar på olika sätt. Man säger också att $\oplus$ är en *associativ binär operation* i $\mathbf{N}_{10}$. Vi kan lägga till en punkt till punktlistan ovan:

- Den binära operationen $\oplus$ är associativ i $\mathbf{N}_{10}$.

De tre punkterna ovan gör tillsammans att $\mathbf{N}_{10}$ tillsammans med $\oplus$ utgör en **grupp**.

Vi kan ta denna delmängd av $\mathbf{N}_{10}$: $\{[0],[2],[4],[6],[8]\}$.

Den delmängden är också en grupp:

- Den innehåller ett neutralt element.
- Varje element har en invers.
- Den binära operationen $\oplus$ är associativ.

Uppgifter

19. Gör en additionstabell för denna delgrupp.

20. Varför är inte den här delmängden, $\{[2],[4],[6],[8]\}$, till $\mathbf{N}_{10}$ en delgrupp tillsammans med $\oplus$?

21. Det finns en delgrupp till $\mathbf{N}_{10}$ som bara har två element. Försök att finna denna!

Mängden $\mathbf{N}_{10}$ är ingen grupp tillsammans med den binära operationen $\otimes$. Det finns element som inte har någon multiplikativ invers. Visserligen har vissa av elementen multiplikativ invers, tex. har elementet $[3]$ den multiplikativa inversen $[7]$, eftersom $[3]\otimes[7]=[1]$. ($[1]$ är ju det neutrala elementet i det här sammanhanget.) Men *alla* element ska ju ha en invers om delmängden ska vara en delgrupp.

Uppgift
22. Försök finna en delmängd till $\mathbf{N}_{10}$ som är en grupp tillsammans med $\otimes$.
(Ledning: delmängden har fyra element.)
23. Gör en multiplikationstabell för den delmängden.
24. Utgå från delmängden $\{[0],[5]\}$ och $\otimes$.
Är den delmängden en grupp? Vilket är i så fall det neutrala elementet?
(Detta är nog en klurig uppgift!)
25. Gör en multiplikationstabell för $\{[0],[5]\}$ och $\otimes$.

Vi återgår nu till $\mathbf{N}_{10}$ och avser att använda både $\oplus$ och $\otimes$. Vi har redan konstaterat att $\mathbf{N}_{10}$ är en grupp tillsammans med $\oplus$. Vi kan ju räkna $\otimes$ i $\mathbf{N}_{10}$, trots att $\mathbf{N}_{10}$ inte är någon grupp tillsammans med $\otimes$. Det finns alltså två olika binära operationer i $\mathbf{N}_{10}$ och den ena, som brukar kallas *den första*, gör $\mathbf{N}_{10}$ till en grupp. Detta räcker för att man ska kunna kalla $\mathbf{N}_{10}$ för en **ring**.

I en *ring* ska det alltså finnas *två olika binära operationer*. Den ena av dem ska göra mängden man utgår ifrån till en *grupp*, men man har inte något sådant krav på den andra av dem.

Men, det är en sak till! Man måste bestämma i vilken ordning man ska räkna om båda operationerna förekommer samtidigt.

Man har bestämt att *den andra* binära operationen ska *räknas först*. Så ska man göra oavsett i vilken ordning elementen står.

Ett exempel: $[3]\oplus[4]\otimes[2]=[3]\oplus[8]=[1]$.

Uppgift
26. Beräkna $[5]\otimes[2]\oplus[4]\otimes[3]\oplus[8]\oplus[3]\oplus[8]\otimes[9]$.
(Svaret ska bli $[5]$.)

En ring behöver inte ha multiplikativt enhetselement. Det räcker med att mängden är en grupp tillsammans med ”första binära operationen” och att det finns en binär operation till. Delmängden $\{[0],[2],[4],[6],[8]\}$ till $\mathbf{N}_{10}$ är en ring, men den har inget enhetselement med avseende på $\otimes$.

Om en ring har ett enhetselement med avseende på dess andra binära operation, så brukar man kalla detta för en **etta**, även om det inte har något med *talet* 1 att göra.

Uppgift
27. Visa att delmängden $\{[0],[5]\}$ till $\mathbf{N}_{10}$ är en ring med etta. Ange ”ettan”!
(Kanske en svår uppgift?)

En ring där alla element *utom enhetselementet för den första binära operationen* har invers med avseende på den andra binära operationen kallas en **kropp**. Alltså är $\{[0],[5]\}$ en kropp.