

Matriser

Man kan säga att en **matris** är ett schema. Matriser består av **rader** och **kolumner**, precis som ett schema eller en tabell. Ofta kallas kolumnerna för **kolonner**. Vi ska här hålla oss till **kvadratiske matriser**, som bara har två rader och två kolonner. Sådana matriser kallas ”två gånger två-matriser” och man skriver 2×2 -matriser. Oftast fyller man matriserna med tal, men vi ska fylla dem med element ur $\mathbf{N}_{10}$. Ja, vi ska faktiskt bara hålla oss till elementen $[0]$ och $[5]$ ur $\mathbf{N}_{10}$.

Några exempel på sådana matriser är

$$\begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [5] & [5] \\ [5] & [5] \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} [0] & [5] \\ [5] & [0] \end{pmatrix}.$$

Man omger alltså raderna och kolonnerna i matrisen med en stor parentes. Raderna och kolonnerna består av **matriselement**.

Man kan addera matriser. Man brukar kalla detta för att man utför **matrisaddition**. Man brukar då skriva ett ”vanligt” plustecken mellan matriserna. Hur matrisaddition går till framgår av detta exempel.

$$\begin{pmatrix} [5] & [0] \\ [5] & [5] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0] & [5] \\ [5] & [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5] \oplus [0] & [0] \oplus [5] \\ [5] \oplus [5] & [5] \oplus [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5] & [5] \\ [0] & [5] \end{pmatrix}.$$

Man ”räknar ihop” matriselementet högst upp till vänster i den första matrisen med matriselementet som står högst upp till vänster i den andra matrisen. Resultatet ska stå högst upp till vänster i matrisen man får fram som summan av de båda matriserna. Man fortsätter sedan på motsvarande sätt med övriga matriselement.

Uppgifter

28. Skriv upp alla tänkbara matriser med matriselementen $[0]$ och $[5]$.

(Det finns 16 stycken.)

29. Visa att mängden av matriserna som har matriselement $[0]$ och $[5]$ är en grupp tillsammans med matrisadditionen.

Ledning:

Visa alltså

- Att det finns ett enhetselement i mängden av matriserna.
- Att alla matriser har en invers.
- Att matrisadditionen är associativ.

Man kan även införa en andra binär operation, ”matrismultiplikation”, i mängden av matriserna. Man använder en punkt som multiplikationstecken eller, ibland, inget tecken alls. Nedanstående matriser får utgöra ett belysande exempel.

$$\begin{pmatrix} [s] & [t] \\ [u] & [v] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [w] & [x] \\ [y] & [z] \end{pmatrix}.$$

Första raden i vänstra matrisen, $\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix}$, ”räknas ihop” med första kolonnen, $\begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$, i högra matrisen. Det går till på följande sätt. $\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot w \\ t \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot w + t \cdot y \end{bmatrix}$. Resultatet $\begin{bmatrix} s \cdot w + t \cdot y \end{bmatrix}$ ska sedan placeras i skärningen av första raden i vänstra matrisen och första kolonnen i högra matrisen om man tänker sig att den ena av dem läggs ovanpå den andra. Bokstäverna s, t, u, v, w, x, y och z står här alltså istället för antingen $[0]$ eller $[5]$.

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \cdot | \\ \hline \end{array} \right)$$

Man gör sedan på motsvarande sätt med raderna i den vänstra matrisen och kolonnerna i den högra matrisen. Se nedan.

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \cdot | \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline | \cdot \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \cdot | \\ \hline \end{array} \right)$$

I mängden av matriserna ovan har vi alltså både båda binära operationerna *matrisaddition* (den första operationen) och *matrismultiplikation* (den andra operationen). Eftersom mängden av matriserna är en grupp under matrisadditionen, så är den alltså en ring eftersom vi även kan utföra matrismultiplikation.

Nu kommer några arbetsamma uppgifter!

Uppgifter

30. Beräkna

$$\begin{pmatrix} [5] & [0] \\ [5] & [5] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [5] & [5] \\ [5] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [0] & [5] \\ [5] & [5] \end{pmatrix}$$

Kom ihåg att matrismultiplikationen ska utföras före matrisadditionen!

31. Har ringen bestående av mängden av matriserna någon etta? Vilken matris är i så fall etta?

32. Några av matriserna har invers med avseende på matrismultiplikationen. Försök hitta dessa! (Det finns sex stycken.)

33. När man utför matrismultiplikation mellan två matriser så kan man inte alltid vända på ordningsföljden. Kan man göra det, så säger man att multiplikationen är **kommutativ**. Kan man *inte* göra det kallas multiplikationen **icke kommutativ**. Försök finna två matriser som inte kommuterar då man multiplicerar dem och försök finna exempel på att det finns matriser som kommuterar.

34.

Vi utgår från matrisen $\begin{pmatrix} [w] & [x] \\ [y] & [z] \end{pmatrix}$. Vi bildar **determinanten** till denna matris på följande sätt:

$$[w] \otimes [z] \oplus [x] \otimes [y] = [w \cdot z] \oplus [x \cdot y] = [w \cdot z + x \cdot y].$$

Om determinanten blir $[5]$ har matrisen en multiplikativ invers, men inte om den blir $[0]$.

Försök finna matriser som är inverser till varandra under matrismultiplikation.