

Sidoklasser

Vi återgår till att betrakta $\mathbf{N}_{10}$ med den binära operationen $\oplus$. Vi fann tidigare att vi hade att göra med en *grupp*.

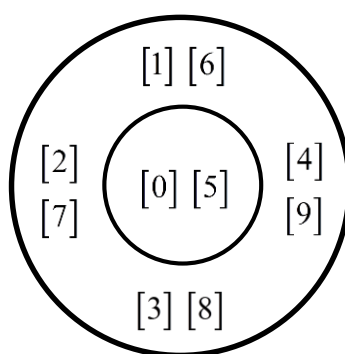
Delmängden $\{[0], [5]\}$ är en *delgrupp* till $\mathbf{N}_{10}$ med den binära operationen $\oplus$.

Uppgift

35. Visa att $\{[0], [5]\}$ uppfyller gruppvillkoren nedan.

- Den innehåller ett neutralt element.
- Varje element har en invers.
- Den binära operationen $\oplus$ är associativ.

Figuren nedan är en illustration av $\mathbf{N}_{10}$ med delgruppen $\{[0], [5]\}$ inringad i mitten.



Eftersom $\{[0], [5]\}$ är en grupp stannar man kvar i denna vid alla sammansättningar av dess element, $[0]$ och $[5]$, med den binära operationen $\oplus$.

När man räknar med vanliga tal, kan man addera 0 till sig självt och resultatet blir bara 0. Alltså, $0 + 0 = 0$. Hade vi betraktat hela $\mathbf{N}_{10}$ kunde vi konstatera att när dess neutrala element, $[0]$, sammanfogas med sig självt blir resultatet fortfarande $[0]$. Alltså $[0] \oplus [0] = [0]$.

Delgruppen $\{[0], [5]\}$ påminner i detta avseende alltså både om talet 0 och om elementet $[0]$ i $\mathbf{N}_{10}$.

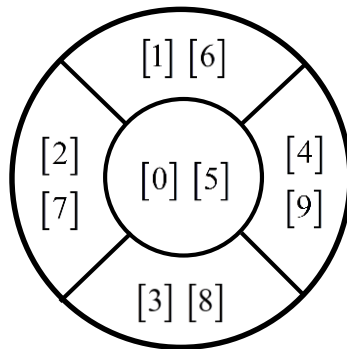
När man adderar 0 till ett tal, ”händer ingenting med talet”. Ett exempel är additionen $7 + 0 = 7$. Går vi över från tal till $\mathbf{N}_{10}$, kan vi på motsvarande sätt konstatera att ”ingenting händer” vid sammanfogning med $[0]$. Exempelvis gäller ju att $[7] \oplus [0] = [7]$.

Vi tar nu *ett viktigt steg*! Vi ska betrakta delgruppen $\{[0], [5]\}$ som om den motsvarar talet 0 och elementet $[0]$ i $\mathbf{N}_{10}$.

Men, resultaten tycks ju bli *olika* när man tex. bildar $[4] \oplus [0]$ och $[4] \oplus [5]$, trots att både $[0]$ och $[5]$ är element i delgruppen $\{[0], [5]\}$, som vi ju vill ska fungera som talet 0 och som elementet $[0]$ i $\mathbf{N}_{10}$. Vi erhåller ju resultaten $[4]$ respektive $[9]$, som ju är olika.

Lösningen på detta dilemma får bli att vi i *detta sammanhang* betraktar $[4]$ och $[9]$ som *ekvivalenta* och säger att de bildar en **sidoklass** till delgruppen $\{[0], [5]\}$.

På motsvarande sätt finner man att det finns ytterligare sidoklasser. (Man räknar faktiskt även delmängden $\{[0], [5]\}$ som en sidoklass.) I figuren nedan är alla sidoklasserna markerade.



Uppgift

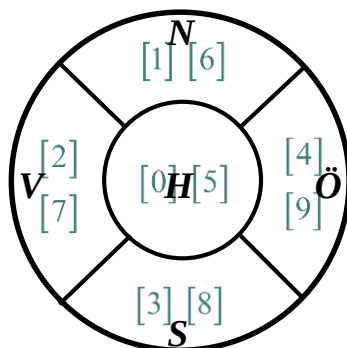
36. Kontrollera att sidoklasserna är korrekt markerade.

När man delar ett tal med ett annat tal kallas resultatet för en **kvot**. Sidoklasserna delar in mängden N_{10} i delmängder. Likheten med taldivision har gjort att delmängderna också kallas **kvotmängder**.

Uppgift

37. Delmängden $\{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ till N_{10} är också en delgrupp då man räknar med den binära operationen $\oplus$. Kontrollera detta och ange den delgruppens sidoklasser. (Kom ihåg att även delgruppen själv betraktas som en sidoklass.)

Vi ska nu införa beteckningar på sidoklasserna nedan. Delgruppen $\{[0], [5]\}$, som alltså själv är en sidoklass, kallar vi H , vilket är gängse standard. Övriga sidoklasser betecknas som figuren nedan visar. Dessa beteckningar är dock speciella för detta sammanhang.



Man brukar även låta kvotmängderna bilda en mängd. Med beteckningssättet ovan skriver vi denna mängd $\{H, N, S, Ö, V\}$.

Det visar sig faktiskt att man kan införa en binär operation även i denna mängd. Vi kallar den binära operationen *addition*, och betecknar den med ett helt vanligt plustecken, $+$.

För att visa hur denna typ av addition fungerar bildar vi $N + S = \ddot{O}$ genom att ta något element i N , exempelvis $[6]$ och sammanfoga detta med något element i S , exempelvis $[3]$. Eftersom $[6] \oplus [3] = [9]$ och $[9]$ ligger i $\ddot{O}$, så säger vi alltså att $N + S = \ddot{O}$. Nu har vi ju valt $[6]$ ur N och $[3]$ ur S . Men oavsett vilket element vi valt ur N och oavsett vilket element vi valt i S , så hade vi ändå fått ett element i $\ddot{O}$ som resultat.

Uppgifter

38. Undersök påståendet att man kan välja element hur som helst ur sidoklasserna och att resultatet ändå blir detsamma då man adderar dessa.

39. Gör en additionstabell för $\{H, N, S, \ddot{O}, V\}$.

När man räknar addition i $\{H, N, S, \ddot{O}, V\}$ så visar det sig att man har att göra med en grupp som kallas en **kvotgrupp** till N_{10} och som betecknas $N_{10}/\{[0], [5]\}$.

Uppgift

40. Visa att $N_{10}/\{[0], [5]\}$ är en grupp.