

Julkalendern 2016

Lucka 1

Vad kommer näst i följderna F4E, S9, SE5EN, ...?

Lucka 2

Summan av ett fyrsiffrigt heltal och ett tresiffrigt heltal blir ett femsiffrigt heltal enligt

$$\text{GRÖT} + \text{RIS} = \text{NISSE},$$

där varje bokstav döljer en siffra och två olika bokstäver motsvarar olika siffror. Bestäm samtliga möjliga kombinationer.

Lucka 3

Jultomten såg på ett porträtt. På frågan vem mannen på porträttet var svarade han

”Bröder och systrar har jag inte, men denne mans far är min fars son”.

Vem var mannen på porträttet?

Lucka 4

För vilka positiva heltal a , b och c gäller det att

$$abc = 84 \quad \text{och} \quad (a+1)(b+1)(c+1) = 180$$

där $a \leq b \leq c$?

Lucka 5

Julgransodlarna Träter och Bråkar äger tillsammans en bit mark där det växer ett jämnt antal granar. Visa att oavsett granarnas position går det alltid att dra en rät linje genom området så att antalet granar på båda sidor om linjen är lika.

Lucka 6

Man ska kora stadens bästa tremannalag i snöbollskrig med en turnering där det i varje match deltar två lag. Visa att när turneringen är slut har ett jämnt antal av lagen deltagit i ett udda antal matcher.

Lucka 7

Tomtemor har låst in all glögg och utsett fyra nissar att vakta. Dörren till vinkällaren har flera lås och varje vakt har fått en eller flera av nycklarna. Om vi kräver att minst tre av vakterna, oavsett vilka, måste närvara för att kunna öppna dörren, hur många lås behövs och hur ska nycklarna fördelas?

Lucka 8

Förra julen skickade Alice följande meddelande till Bob.

```
ZLLQRIWBNEKPDFVQXLOQZTIZQOLVNYLXKORHRCARVDFHYXIVLNBLDWDLXPFAUCPN
VFZUASVVLZSMKLDACQOKFVBZRAERIFCUIRIWCZKARXWIMBZQVDQSIOCIRBKWXNY
VZRLHZATFZUCDLBZNVFZUQFZKQIRDFBKRIDCMVLDACTRRIDCMVLDACTRRIDCRLS
ESVVLZSUKQDNLBQAOKBTAKQARHLRIUNHRNQXAYHDYQADLBZQE
```

Eve lyckades knäcka kryptot och fann att klartexten var följande sång.

Dashing through the snow
In a one-horse open sleigh
O'er the fields we go
Laughing all the way
Bells on bobtail ring
Making spirits bright
What fun it is to ride and sing
A sleighing song tonight!
Jingle bells, jingle bells,
Jingle all the way.
Oh! what fun it is to ride
In a one-horse open sleigh.

Bestäm krypteringsnyckeln under antagandet att det rör sig om ett Playfair-krypto. Denna jul skickar Alice följande meddelande till Bob.

```
TASZYFEMEXTKWSATFZCUQIULAUSCAOHLAIRLVQVQRETAVSXVHYAUWXIRDFXWVLZ
VZHXWRMREMLYRYDPHZQVQXLISRAWXQNLIRLDYYDLQXVNCPCQVQVQSITZUCKSUBLH
POR.IEXVMZEQYFYNCWXUCDLYD
```

Eve utgår från att de används samma krypto och krypteringsnyckel som förra året. Bestäm klartexten, dvs knäck årets julhälsning från Alice.

Lucka 9

I multiplikationen

$$\begin{array}{r} \text{G O D} \\ \times \text{J U L} \\ \hline \text{N O N} \\ \text{T O D O} \\ + \text{T G O J} \\ \hline \text{T O M T E N} \end{array}$$

motsvarar varje bokstav en siffra och två olika bokstäver motsvarar olika siffror. Bestäm vilken siffra som döljer sig bakom respektive bokstav.

Lucka 10

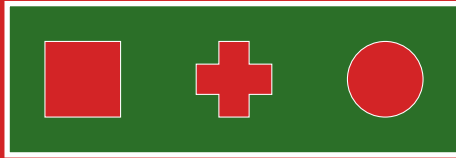
Att fördela elva nötter i tre muggar, så att varje mugg innehåller ett udda antal nötter, är enkelt. En lösning ges i följande figur.



Men hur fördelar man tio nötter i tre muggar så att varje mugg innehåller ett udda antal nötter?

Lucka 11

Jultomten har standardiserat julklappstillverkningen så nu producerar man endast tre olika typer av paket med avseende på form och storlek. Varje julklapp passar – utan glapp – i ett av hålen enligt följande figur.



För att underlätta sorteringen av julklapparna ska tomtenssarna placera klapparna i rätt släde beroende på i vilket hål som respektive julklapp kan passera. Men när julstressen är som intensivast kommer till sorteringen en julklapp som kan passera samtliga tre hål utan glapp. Hur ser paketet ut?

Lucka 12 (Julens hårdaste nöt)

Eve har valt två olika positiva heltal, vilka båda är större än 1 och sådana att summan av dem är mindre än eller lika med 100. Låt oss beteckna dem x och y . Hon bestämmer därefter $S = x + y$ och $P = xy$. Till Alice skickar hon P och till Bob skickar hon S . De får båda även veta ovan nämnda kriterier för hennes val av x och y .

- Jag tänker inte avslöja x eller y för er, skrattade Eve.
- Jag kan inte bestämma x och y , säger Alice till Bob.
- Det visste jag att du inte skulle kunna göra, svarar Bob.
- Aha! Men nu vet jag vad x och y är, replikerar Alice.
- Då kan även jag säga vad x och y är lika med, utropar Bob.
- Grr! De ska då alltid förstöra julstämningen, morrar Eve surmulet.

Vad är x och y lika med?

Lucka 13

På baksidan av en tavla är ett snöre fastsatt i båda sina ändar. Häng upp tavlan med snöret på två spikar, så att om man tar bort en av spikarna, så hänger inte tavlan kvar på den kvarvarande spiken utan tavlan ramlar ner.

Lucka 14

Tre syskon diskuterar sina favoritheltal. Senare frågar deras mamma vilka heltal var och en har som sin favorit.

- De är alla positiva och produkten av dem är 36, säger Alice.
- Det räcker inte, jag behöver veta mer, säger mamman.
- Summan av våra favoritheltal är lika med min ålder, säger Bob.
- Jag kan fortfarande inte säga vilka heltalen är, säger mamman.
- Mitt heltal är större än båda mina systrars, säger Eve.
- Nu vet jag vilka heltalen är, säger mamman.

Vilka favoritheltal har syskonen?

Lucka 15

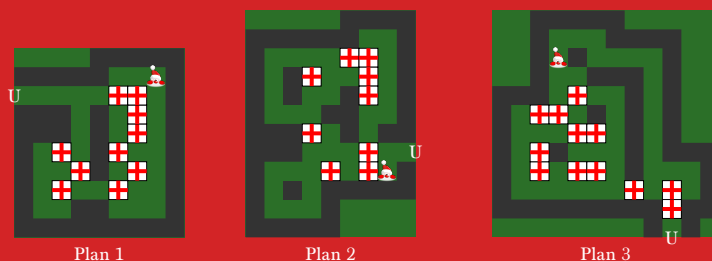
Låt $p = 1$. Alice och Bob turas om att välja ett av heltalen $2, 3, \dots, 9$ och multiplicerar sitt val med p . Den av dem som först får en produkt p större än eller lika med 1000 vinner. En spelomgång kan tex inledningsvis se ut på följande sätt.

Alice väljer 3, vilket ger $p \leftarrow 3p = 3 \cdot 1 = 3$.
Bob väljer 5, vilket ger $p \leftarrow 5p = 5 \cdot 3 = 15$.
Alice väljer 2, vilket ger $p \leftarrow 2p = 2 \cdot 15 = 30$.
Bob väljer 3, vilket ger $p \leftarrow 3p = 3 \cdot 30 = 90$.

Finns en vinnande strategi för Alice oavsett hur Bob spelar.

Lucka 16

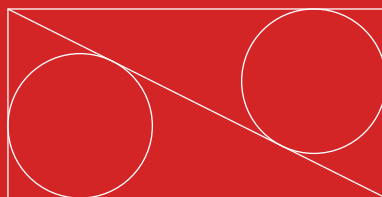
Tomten ska lasta på de stora julklapparna på sin släde. De står för tillfället i hans tre våningar stora lager. Paketen är dock så tunga att han endast orkar putta ett paket i taget i de fyra väderstrecken. De är dessutom så otympliga att han inte kan dra dem.



Tomten tar personalhissen till de olika våningarna i lagret och finner att an är instängd. Dirigera tomten så han kan putta ut samtliga paket ur respektive lager via utgången som är markerad med ett U. Ledning: Tomten måste undvika att putta in ett paket i ett hörn, ty då kan han inte flytta det längre och tänk på att tomten endast kan putta ett paket utmed en vägg.

Lucka 17

Givet en rektangel med sidorna x och y . En diagonal i rektangeln bildar två trianglar och i var och en av dessa trianglarna ritar man respektive inskriven cirkel, se följande figur. Bestäm avståndet mellan de två tangeringspunkterna på diagonalen.



Lucka 18

Klartexten

THE QUICK BROWN FOX JUMPS OVER THE LAZY DOG

ger kryptogrammet

TWUCU FKFXL AVIVK GYGUN OSCVR ZWLNK HXATM

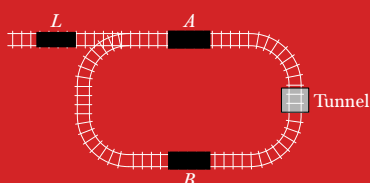
då det krypteras med Bifid Cipher och en okänd krypteringsnyckel. Bestäm krypteringsnyckeln.

Lucka 19

Givet åtta säckar med mynt. Mynten väger exakt 9 gram stycket. Men minst en av säckarna innehåller enbart falska mynt, och ett sådant väger precis 10 gram. Antalet mynt varierar i säckarna, men ingen säck innehåller färre än 300 mynt. Hur kan man hitta de säckar som enbart innehåller falska mynt genom en enda vägning med en vanlig våg?

Lucka 20

Du ska med hjälp av loket L i nedanstående figur byta plats på vagnarna A och B , så att loket återgår till sin ursprungsplats. Man kan koppla ihop vagnarna och loket både fram- och baktill. Loket är så starkt att det kan dra och skjuta båda vagnarna samtidigt. Tunneln är dock så smal att endast loket kan passera genom den. Försök hitta en lösning med så få operationer som möjligt.



Lucka 21

Sjutton pirater försöker dela upp ett byte med guldmynt rättvist mellan sig. Tyvärr blir det tre guldmynt över och det utbryter ett slagsmål, där en av piraterna dödas. De överlevande gör ett nytt försök att dela upp guldmynten. Denna gång blir det tio mynt över. Återigen börjar piraterna slåss. En av dem dödas och de överlevande försöker igen dela upp guldmynten och nu fördelas mynten rättvist mellan piraterna. Bestäm det minsta möjliga antalet guldmynt piraterna försöker dela upp.

Lucka 22

Paret Elinura och Hectyr von Drummelstropp håller nyårsfest, till vilken åtta gifta par är bjudna. Under festen hälsar man på varandra. Ingen hälsar på sin äkta hälft eller på sig själv. Dessutom hälsar inga på varandra flera gånger. Strax innan tolvslaget frågar värdinnan samtliga hur många man hälsat på. Till sin förvåning angav de olika svar. Hur många gäster hade värdinnans man hälsat på?

Lucka 23

Hur bestämmer du rymddiagonalen i en tegelsten? Till ditt förfogande har du tre tegelstenar och en tumstock. Du får inte utföra några beräkningar.

Lucka 24

Bland tolv mynt finns ett falskt mynt. De äkta mynten har samtliga samma vikt, medan de falska myntet har en annan vikt. Till ditt förfogande har du en balansvåg. Finn ett sätt att med som mest tre vägningar hitta det falska myntet och avgöra om det väger mer eller mindre än ett äkta mynt.

Julklappsrim

Nu är kursen slut och ledigheten varar ända tills *Kryptering 2* börjar. Men det var inte sant, för däremellan kommer tentan i *Kryptering 1*. Nedan följer det julklappsrim som hör till examinatorns julklapp till dig, nämligen tentamen.

TOÅÅH MZVDOÅHTO RSHNN
XV EHVH OÅ NHNNOVDSHNN.
TOÅ UHÅTSHV IL RVPNÅOV BÅG
DIL MZVDXÅÅOV OKO B MYÅTOVBÅG.
IL AYS DÅZROÅ XV OÅ NXVD
RHÅ TY HSSÅBT EODÅXLLH OÅ LYSÅBNSBRHÅBK BÅKOVD.
TOÅ GWV BÅÅO HÅÅ NW AYSHMÅTÅ VBL LH
OMÅOVDIL THÅYLOÅ OA XV VOSHÅBKÅ NVBLH.
ÅY DRH KB XÅH GVZÅ GAIVT HK VBD
IJU RHÅDRO RVPNÅOVH LOT UAXSN HK OÅ LHÅVBD.
SWÅ GSZGGOÅ DKHSÅH IL TOÅ EVXÅÅD
LOTHÅ TY EOVXRÅHV OÅ AIEEBG RIÅGVYOÅD.
RÅXJR ÅWGVH UWVTH ÅZÅÅOV
DW XV TY VYDÅHT HÅÅ VXRÅH LOT NVBLBÅBKH VZÅÅOV.
OÅÅ ÅPÅÅ WV DRH DÅHVÅ MBVHD BÅ LOT GSHL
IJU TOÅÅH ÅOFÅ XV BÅÅO SXÅGVO OÅÅ RVPNÅIGVHL.
DO ÅY ÅBSS HÅÅ VI TOÅ B UHLÅ,
DW HÅÅ AHG RHÅ DRVBKH G KBT TBÅÅ ÅHLÅ.
AHG ZÅDRHV TBG OÅ GIT AYS
IJU UINNHD HÅÅ TY ÅPJROV RYVDOÅ KHVBÅ RYS.

Som sig bör är julklappsrimmet krypterat – med ett monoalfabetiskt substitutionskrypto. Hur lyder rimmet? Ges det manne någon ledtråd till tentan?

God Jul och Gott Nytt År