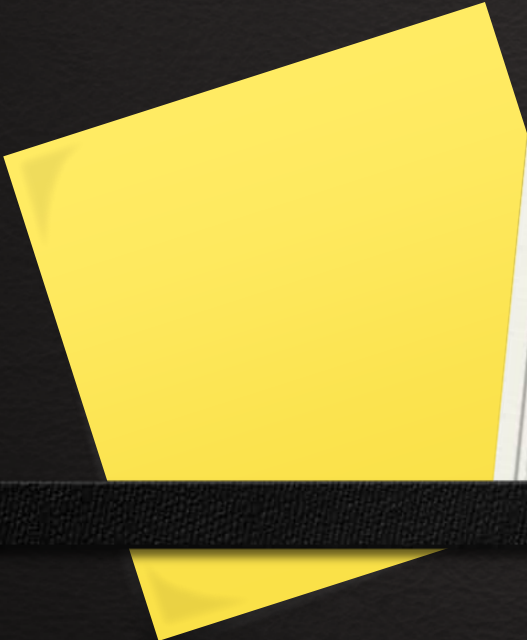


A bright yellow rectangular sticky note is placed on the left side of the page, partially overlapping the white card. It has a slightly irregular, torn-edge appearance.

Aktiviteter för talangfulla elever

Henrik Petersson
Hvitfeldtska gymnasiet

Talangfulla elever

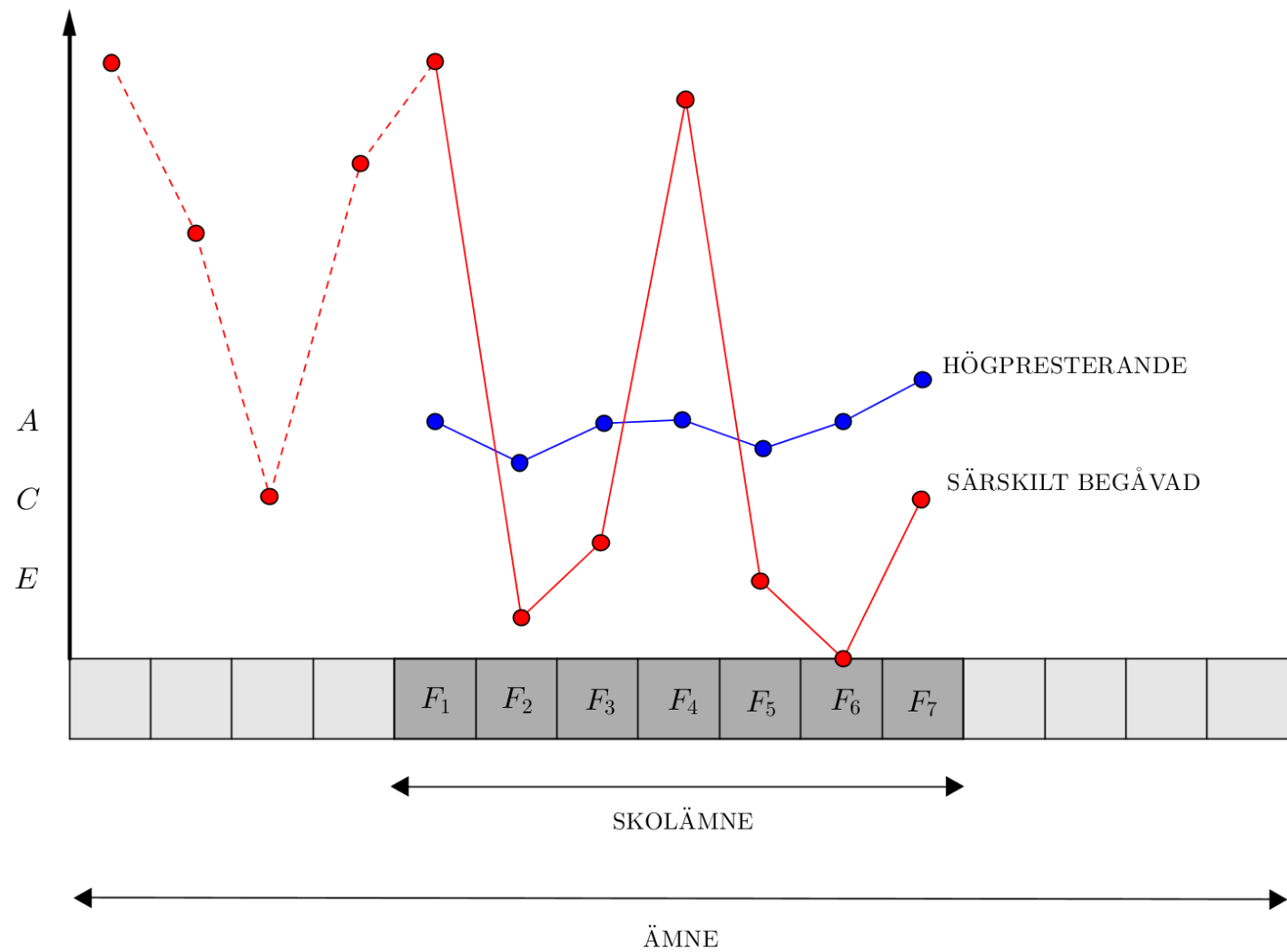


(från NP Ma C 2011)

Nedan ges derivatans värde hos en funktion f i en given punkt P .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^5 + 3 - (2^5 + 3)}{h} = 80.$$

- a) Ange funktionen f .
- b) En tangent dras i punkten P . Bestäm tangentens ekvation.



Utmaningar

Utmaningar

- Vad är en utmaning?

Utmaningar

- Vad är en utmaning?
- Är alla utmaningar meningsfulla?

Utmaningar

- Vad är en utmaning?
- Är alla utmaningar meningsfulla?
- Är det bara genom utmaningar som man kan möta särskilt begåvade elever?

Problemens roll

- Vilka typer av problem tilltalar eleverna?
- Vad vill vi som lärare ha ut av olika problem?

Elever kan stimuleras av:

- Flervalsproblem (problem som bara kräver svar).
- Tävlingsproblem.
- Problem inom ett specifikt område (exempelvis geometri).
- Fantasieggande (icke-abstrakta) problem.
- Problem där de själva är delaktiga i formuleringen.
- Problem som berör (för dem) nya teman/begrepp.
- Aktiviteter där det inte förväntas någon prestation.
- Problem där du som lärare inte heller vet svaret.

Lärare kan vilja stimulera:

- Förmågan att uttrycka tankebanor
- Ett matematiskt förhållningssätt
(kultureras, tänka matematiskt)
- Brett spektra av basfärdigheter
- Uthållighet
- Hantera abstrakta framställningar
- Kreativitet

Utmaning som lärare

i arbetet med talangfulla elever är att hitta aktiviteter som:

- intresserar eleverna, och som
- utvecklar eleverna i olika riktningar, och där vi
- samtidigt har tid för de mindre drivna eleverna.

Tre arbetssätt/problemtyper

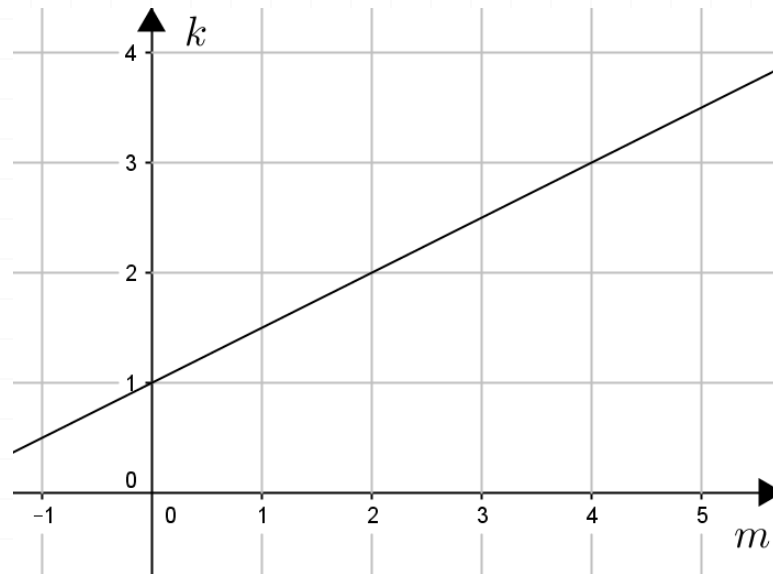
- Bevis och avkodningsproblem
- Differentierade problem
- Volymiösa problem

Bevis och avkodningsproblem

(Ett sätt att stimulera ett matematiskt förhållningssätt,
abstraktionsförmåga samt förmågan att framställa
matematik.)

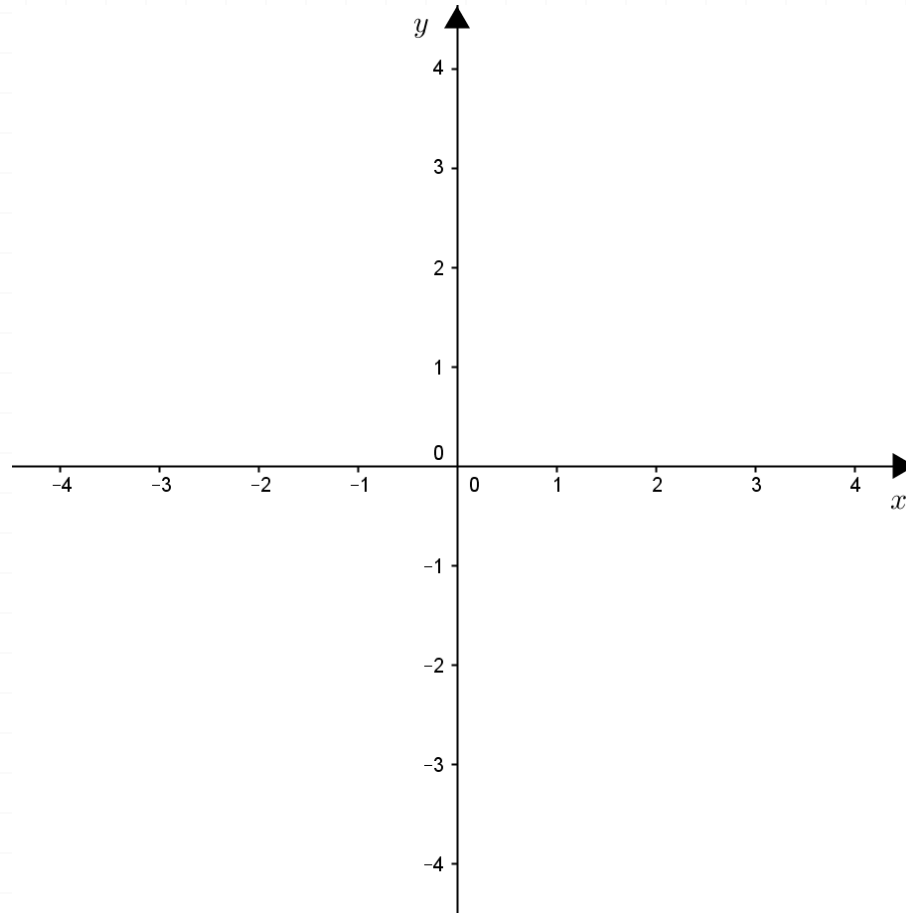
Bevis och avkodning

- Bestäm p med hjälp av pq -formeln då $p^2 + qp + 4 = 0$.
- Vilket k -respektive m -värde har den räta linjen nedan?



Bevis och avkodning

I figuren nedan så är grafen för en funktion ritad. Vilken funktion kan det tänkas vara?



Bevis och avkodning

(från NP Ma C 2011)

Nedan ges derivatans värde hos en funktion f i en given punkt P .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^5 + 3 - (2^5 + 3)}{h} = 80.$$

- a) Ange funktionen f .
- b) En tangent dras i punkten P . Bestäm tangentens ekvation.

Bevis och avkodning

(ur lärobok)

Delbarhet:

Man säger att ett heltal a är *delbart* med ett heltal b om kvoten $\frac{a}{b}$ är ett heltal.

Primtal:

Ett *primtal* är ett heltal större än 1, som inte är delbart med några andra tal än 1 och sig självt.

Bevis och avkodning

En triangel kallas *sexaginta* då dess sidor a, b, c uppfyller att $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

- a) Visa att varje likbent sexaginta triangel är liksidig.
- b) Avgör om det finns några rätvinkliga sexaginta trianglar.

Bevis och avkodning

Ett tal s sägs vara av typen A_2 då det finns heltal a, b, c sådana att s är en lösning till ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- a) Visa att $\sqrt{2}$ är A_2 .
- b) Visa att $\sqrt{2} + 1$ är A_2 .
- c) Visa att om s är A_2 så är $s + n$ också A_2 då n är ett heltal.

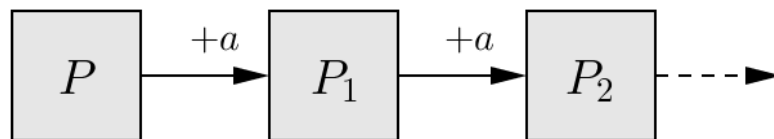
Differentierade problem

(Ett sätt att möta de riktigt drivna och de svagare eleverna samtidigt. Utmana utifrån kursplanerna.)

Differentierade problem

Prisökning

En vara ökar sitt pris med lika många kronor vid upprepade prisökningar. Den första prisökningen var 10 procent. Det här problemet går ut på att undersöka hur stora de övriga prisökningarna är, procentuellt.

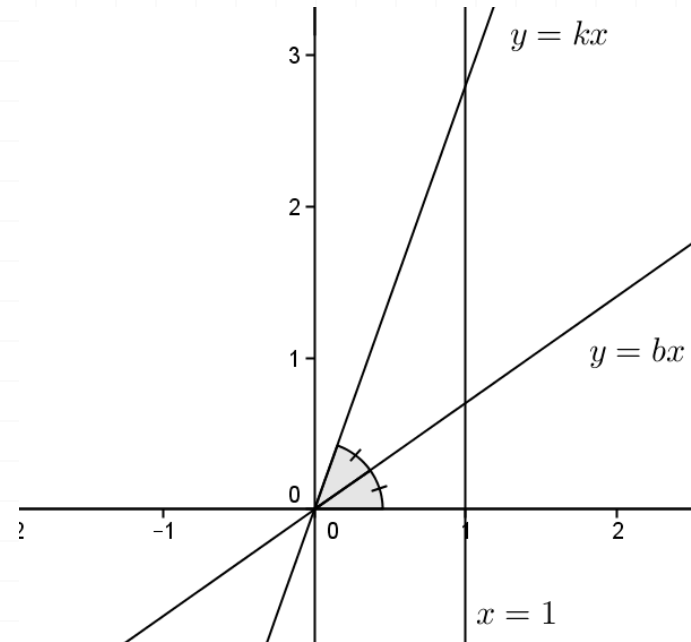


- a) Bestäm den andra prisökningen i procent, i fallet då varans pris P från början var 500 kr.
- b) Bestäm den andra prisökningen i procent, i fallet då varje prisökning var $a = 30$ kr.
- c) Undersök hur stor den andra prisökningen är procentuellt, då varans pris från början är P kronor och varje prisökning a kronor.
- d) Undersök hur stor den n :te prisökningen är procentuellt.
- e) Efter hur många prisökningar blir varje ny prisökning mindre än 5 procent?

Differentierade problem

Ekvation för bisektris

Givet en rät linje med ekvationen $y = kx$, där $k > 0$, så bildar den en spetsig vinkel tillsammans med x -axeln. Det här problemet går ut på att undersöka ekvationen $y = bx$ för motsvarande bisektris.

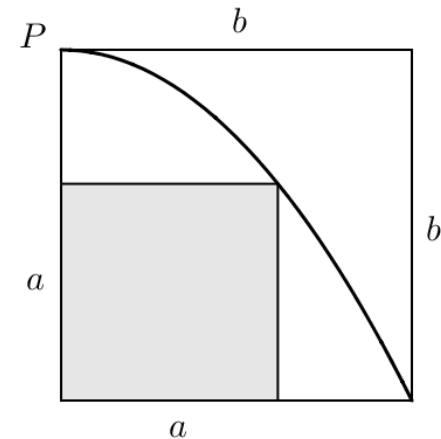


- a) Om k är mycket litet, $k \approx 0$, vad kan då sägas om b ?
- b) Om k är mycket stort, vad kan då sägas om b ?
- c) Antag att $k = 1$, kommer då b vara större eller mindre än $1/2$?
- d) Antag att $k = 1$. Bestäm lutningen b för bisektrisen.
- e) Undersök ett uttryck i k för lutningen b för bisektrisen.

Differentierade problem

Vertex

En parabel är inskriven i en kvadrat med sidan b , enligt figuren till höger. Parabeln går genom två av kvadratens hörn. En kvadrat med sidan a har ett av sina hörn på parabeln. Det här problemet handlar om att undersöka villkor för a och b så att parabeln får sitt vertex i punkten P .

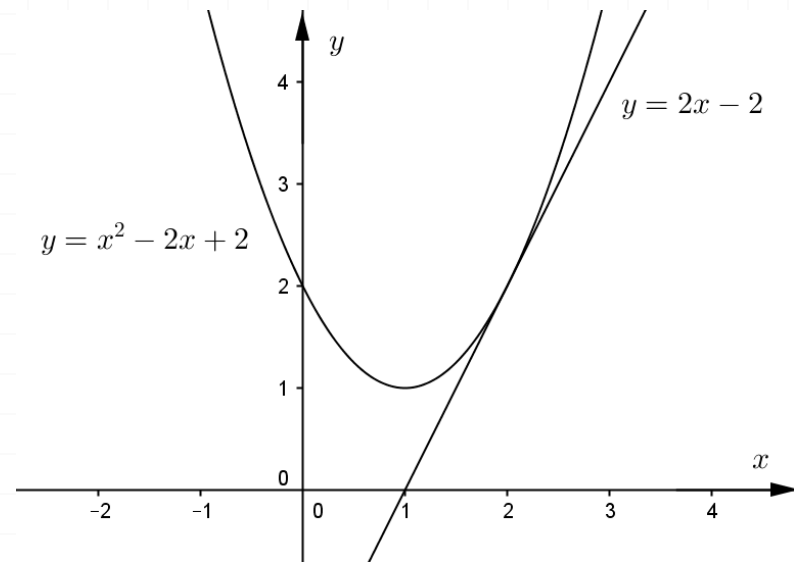


- Antag att $b = 2$ och antag att parabeln har sitt vertex i P . Ange en ekvation för parabeln genom att placera in den lämpligt i ett koordinatsystem.
- Antag att $b = 2$ och antag att parabeln har sitt vertex i P . Bestäm vilket värde a då måste ha.
- Utred vilket samband som måste gälla mellan a och b för att parabeln ska ha sitt vertex i punkten P .

Differentierade problem

Tangentprimitiv

Låt f vara en funktion på formen $f(x) = ax + b$. Det här problemet handlar om att undersöka möjliga primitiva funktioner F till f till sådana att grafen för f utgör en tangent till grafen för F . I figuren till höger ges ett exempel på sådana funktionspar.



- a) Visa att $F(x) = x^2 - 2x + 2$ verkligen är en primitiv till $f(x) = 2x - 2$.
- b) Visa att $f(x) = 2x - 2$ (dess graf) är en tangent till $F(x) = x^2 - 2x + 2$.
- c) Undersök primitiva funktioner F till $f(x) = x$, där f är en tangent.
- d) Undersök primitiva funktioner F till $f(x) = x + 1$, där f är en tangent.
- e) Undersök primitiva funktioner F till $f(x) = ax$, där f är en tangent.
- f) Undersök primitiva funktioner F till $f(x) = ax + b$, där f är en tangent.

Differentierade problem

Trigonometriska ekvationer

Låt $0 \leq A < 1$ samt $B \geq 2$. Betrakta nu ekvationerna:

$$\begin{cases} \cos 2x &= A \cos^2 x & (A) \\ \sin 2x &= B \sin^2 x & (B) \end{cases}$$

Det följer att (A) och (B) har unika lösningar x_A respektive x_B i intervallet $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$. Det här problemet handlar om att undersöka villkor för att $x_A = x_B$ ska gälla.

- a) Bestäm x_B då $B = 2$.
- b) Utred vad A måste vara för att $x_A = x_B$ då $B = 2$.
- c) Utred vad A måste vara för att $x_A = x_B$ då $B = 4$.
- d) Undersök villkor på A och B för att $x_A = x_B$ ska gälla.

Differentierade problem

Omatchande talföljder

Givet ett positivt heltal $n \geq 2$, så låter vi P_n beteckna antalet möjliga sätt att ordna heltalen $1, 2, \dots, n$ i två talföljder $a_1, a_2, \dots, a_n$ och $b_1, b_2, \dots, b_n$ så att $a_i \neq b_i$ för alla i .

(a_n)	1	3	4	2	5
(b_n)	3	5	2	1	4

- a) Bestäm P_2 .
- b) Bestäm P_3 .
- c) Bestäm P_4 .
- d) Undersök ett samband mellan P_5 och P_2, P_3, P_4 .
- e) Bestäm P_5 .
- f) Undersök P_n .

Volymiösa problem

(Ett sätt att stimulera elevernas uthållighet samt kreativitet. Underlag för att utveckla elevernas förmåga att framställa matematik och tankebanor.)

- Tävlingsproblem.
- "Större" problem som eleverna "uppslukas" av.

Volymiösa problem

Ett kolossalt intressant problem

En bonde delar upp sin beteshage i tre lika stora hagar. I den ena hagen A betar det 7 kor, i den andra hagen B så betar 3 kor. I den tredje hagen C så är det en betande ko. Mängden bete (gräs) ökar (växer) linjärt med tiden.

Det här problemet handlar om att undersöka hur länge betet räcker till en ensam kon, givet antalet dagar som betet räcker i de två övriga hagarna. Vilka antaganden krävs?

- Hur länge räcker betet till den ensam kon om betet räcker i 2 dagar i hage A, och i 5 dagar i hage B?
- Hur länge räcker betet till den ensam kon om betet räcker i a dagar i hage A, och i b dagar i hage B?

Riktlinjer för matematisk redovisning

- 1) Beskriv problemet, på ett intresseväckande sätt.
- 2) Introducera figurer och beteckningar.
- 3) Presentera din lösningstext.
 - I. Bind ihop beräkningar med text.
 - II. Organisera dina beräkningar.
 - III. Guida läsaren genom texten.
 - IV. Var noga med precisionen i formuleringarna.
- 4) Knyt ihop säcken, sätt ord på hur din lösningstext verkligen löser problemet i fråga.

Volymlösa problem

Arbeta med följande delproblem, redovisa ditt arbete i en självständig text, fristående från arbetsgången nedan.

En potentiell likhet

- a) Undersök, för några olika par av heltal $a, b \geq 0$, om ekvationen $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$ har en lösning (x, y) där x, y är icke-negativa heltal.
- b) Undersök villkor för heltalen $a, b \geq 0$ för att det ska finnas heltal $x, y \geq 0$ sådana att: $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$.

Elevlösning 1

Problem: Undersök villkor på heltalen $a, b \geq 0$ för att det ska finnas heltal $x, y \geq 0$ sådana att $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$.

Vi primtalsfaktorerar båda leden:

$$12^x \cdot 18^y = (2^2 \cdot 3)^x \cdot (2 \cdot 3^2)^y = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 2^y \cdot 3^{2y} = 2^{2x+y} \cdot 3^{2y+x}$$

$$18^a \cdot 24^b = (2 \cdot 3^2)^a \cdot (2^3 \cdot 3)^b = 2^a \cdot 3^{2a} \cdot 2^{3b} \cdot 3^b = 2^{3b+a} \cdot 3^{2a+b}$$

Vi får då att $2^{2x+y} \cdot 3^{2y+x} = 2^{3b+a} \cdot 3^{2a+b}$ vilket ger

$$\begin{cases} 2x + y &= 3b + a \\ 2y + x &= 2a + b \end{cases}$$

Vi multiplicerar den första ekvationen med 2 och subtraherar den andra från den första ledvis. Det ger

$$\begin{array}{rcl} 4x + 2y - (2y + x) & = & 6b + 2a - (2a + b) \\ 3x & = & 5b \end{array}$$

Detta ger att b måste vara en multipel av 3 då $\frac{5b}{3} = x$ och x är ett heltal större än eller lika med noll.

(Elevlösning 1 forts.)

Om vi istället multiplicerar den andra ekvationen med 2 och sedan subtraherar den första ledvis får vi

$$\begin{array}{rcl} 4x + 2y - (2x + y) & = & 4a + 2b - (3a + b) \\ 3y & = & 3a - b \end{array}$$

Eftersom y är ett heltal större än eller lika med noll så måste även $3y$ vara det. För att det ska vara möjligt så måste $3a$ vara större än eller lika med b , vilket skrivs som $3a \geq b$. Detta kan i sin tur skrivas om till $a \geq \frac{b}{3}$.

Om vi skulle välja två heltal $a, b \geq 0$ för att det ska finnas heltal $x, y \geq 0$ sådana att $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$ måste alltså följande två villkor uppfyllas

V1: b är en multipel av 3.

V2: $a \geq \frac{b}{3}$.

För att sedan få fram värdena på x och y använder vi bara likheterna $3x = 5b$ och $y = a - \frac{b}{3}$ och sätter in våra valda värden på a och b .

Elevlösning 2

Undersök vilka villkor som finns på heltalen $a, b \geq 0$ för att det ska finnas heltal $x, y \geq 0$ sådana att $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$.

$$\begin{aligned}12^x \cdot 18^y &= (2^2 \cdot 3)^x \cdot (2 \cdot 3^2)^y = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 2^y \cdot 3^{2y} = 2^{2x+y} \cdot 3^{2y+x} \\18^a \cdot 24^b &= (2 \cdot 3^2)^a \cdot (2^3 \cdot 3)^b = 2^a \cdot 3^{2a} \cdot 2^{3b} \cdot 3^b = 2^{3b+a} \cdot 3^{2a+b}\end{aligned}$$

$$12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b \rightarrow 2^{2x+y} \cdot 3^{2y+x} = 2^{3b+a} \cdot 3^{2a+b}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3b + a & \text{ekv. med: } -2y - x = -2a + b \\ 2y + x = 2a + b & \text{ekv. med: } 2y + 4x = 2a + 6b \end{cases}$$

Vi addition av de högra ekvationerna får man följande resultat

$$3x = 5b \leftrightarrow x = \frac{5}{3}b, \quad b = \frac{3}{5}x.$$

Ett villkor som alltså är nödvändigt är att b är delbart med tre (x blir alltid en multipel av fem, vilket också är villkor för att de andra variablerna (a, b, y) är heltal).

Ett annat tillräckligt villkor är att x, y, a och $b = 0$.

(Elevlösning 2 forts.)

Ett annat faktum som både följer av och implicerar att $12^x \cdot 18^y = 18^a \cdot 24^b$ är att skillnaden mellan x och y , $x - y = 2b - a$.

$$\begin{pmatrix} y + 2x & = & a + 3b \\ 2y + x & = & 2a + b \\ x - y & = & 2b - a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y + 2x & = & a + 3b \\ 6y + 3x & = & 6a + 3b \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 5y + x = 5a \\ y + \frac{x}{5} = a \\ y = a - \frac{x}{5} \\ y = a - \frac{b}{3} \end{array} \right.$$

Ett villkor som både är nödvändigt och tillräckligt är följande:

$$\begin{array}{l} y = a - \frac{b}{3}, \frac{x}{5} = \frac{b}{3} \\ (x, y \in \mathbb{Z}, x, y \geq 0) \\ (a, b \in \mathbb{Z}, a, b \geq 0) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x \text{ delb. med } 5 \\ \frac{b}{3} \in \mathbb{Z} \\ a \geq \frac{b}{3} \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{b}{3} \in \mathbb{Z}, a \geq \frac{b}{3} \rightarrow \text{minst en lösning där } x, y \in \mathbb{Z}, x, y \geq 0 \right)$$