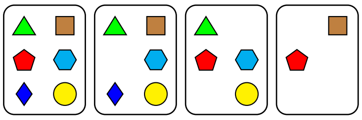
Zero sumZ

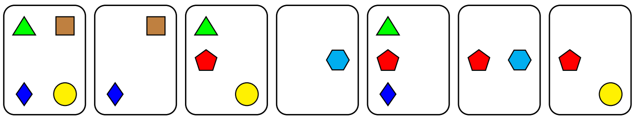
Lämplig för 2–6 spelare.

Spelregler

Spelet *Zero sumZ* är ett kortspel där varje kort innehåller en eller flera av sex geometriska former enligt följande figur.



Kortleken innehåller 63 olika kort. Man drar sju kort och vänder dem uppåt och övriga kort läggs nedåtvända mitt på bordet. Alla spelare försöker finna ett urval bland de sju korten så att antalet av respektive geometrisk form är jämn. När en spelare finner ett urval så ropar denne ”Zero”. Antag t ex att följande kort är vända uppåt på bordet.



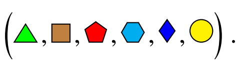
Här kan man välja ut första, andra, tredje, fjärde och sjätte kortet, ty bland dessa fem kort finns det sammanlagt två stycken trianglar, kvadrater, pentagoner, hexagoner, romber och cirklar.

Spelaren visar för övriga spelare de kort dennes val. Efter att motspelarna har kontrollerat att urvalet är korrekt lägger spelaren dessa i en hög framför sig och drar lika många kort från talongen på bordet.

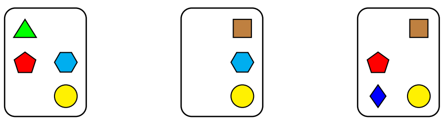
När det är färre än sju kort kvar, så är spelet slut. Den spelare som samlat flest kort vinner.

En matematisk beskrivning av spelet

Låt sextupeln (a, b, c, d, e, f) representera ett kort, där varje bokstav antingen är 1 eller 0 beroende på om motsvarande geometriska form finns på kortet eller inte. Talens position i tupeln är kopplad till en av de geometriska formerna enligt följande.

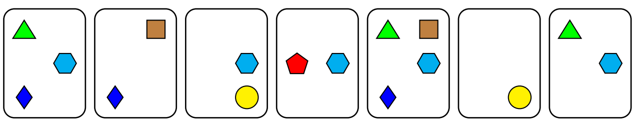


Vi t ex följande tre kort och tillhörande tupeln.



$(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$

Antag att vi har följande sju kort.



Hur finner vi bland dem de kort vi ska välja ut så att antalet av varje geometrisk form är jämnt? De sju korten ovan representeras av

$$(1, 0, 0, 1, 1, 0).\ (0, 1, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1, 0, 1),$$
$$(0, 0, 1, 1, 0, 0),\ (1, 1, 0, 1, 1, 0),\ (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$
$$\text{respektive}\quad (1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

För att räkna antalet av respektive geometrisk form adderar vi dessa sextupler:

$$\begin{array}{rr}
 & (1, 0, 0, 1, 1, 0) \\
 & (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
 & (0, 0, 1, 1, 0, 0) \\
 & (1, 1, 0, 1, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
+ & (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\hline
 & (3, 2, 1, 5, 3, 2)
\end{array}$$

Vi ser att endast ett kort har en pentagon. Därför kan det fjärde kortet inte väljas. Men när vi bortser från det kortet så måste vi även räkna bort en hexagon:

$$\begin{array}{rr}
 & (1, 0, 0, 1, 1, 0) \\
 & (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
 & \cancel{(0, 0, 1, 1, 0, 0)} \\
 & (1, 1, 0, 1, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
+ & (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\hline
 & (3, 2, 0, 4, 3, 2)
\end{array}$$

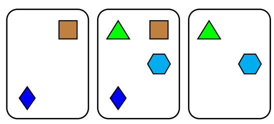
Nu är det bara trianglar och romber som vi har ett udda antal av. Om vi bortser från första kortet, så kan vi räkna bort en triangel och en romb – det är nu ett jämnt antal kvar av dem. Men vi tar också bort en hexagon och därmed har vi nu ett udda antal hexagoner kvar:

$$\begin{array}{rr}
 & \cancel{(1, 0, 0, 1, 1, 0)} \\
 & (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
 & \cancel{(0, 0, 1, 1, 0, 0)} \\
 & (1, 1, 0, 1, 1, 0) \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
+ & (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\hline
 & (2, 2, 0, 3, 2, 2)
\end{array}$$

Tar vi bort den tredje kortet så har vi åter ett jämnt antal hexagoner, men istället ett udda antal cirklar. Det sjätte kortet innehåller endast en cirkel, så vi ta bort även den så har vi funnit ett giltigt urval:

$$\begin{array}{rr}
 & \cancel{(1, 0, 0, 1, 1, 0)} \\
 & (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\
 & \cancel{(0, 0, 0, 1, 0, 1)} \\
 & \cancel{(0, 0, 1, 1, 0, 0)} \\
 & (1, 1, 0, 1, 1, 0) \\
 & \cancel{(0, 0, 0, 0, 0, 1)} \\
+ & (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\hline
 & (2, 2, 0, 2, 2, 0)
\end{array}$$

Med andra ord ska vi visa följande tre kort för motspelarna.



Att lägga undan kort och prova olika kombinationer är en möjlig strategi för att hitta ett urval bland de sju kort man har på hand. Men är det alltid möjligt att hitta ett giltigt urval?

Sats 1. *Det går alltid att bland sju kort hitta ett urval sådant att antalet av respektive geometrisk form är jämn.*

Bevis. Betrakta ett kort, d v s en sextupel (a, b, c, d, e, f), som en vektor i ett vektorrum av dimension 6 över kroppen $\mathbb{F}_2$. En hand om sju kort representeras med vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_7$. Dessa vektorer är linjärt beroende, d v s

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_7 v_7 = 0$$

har en icke-trivial lösning. Notera att ingen av vektorerna är nollvektorn. De a_k som är lika med 1 i en lösning ange vilka kort som ska väljas så att varje geometrisk form förekommer ett jämnt antal gånger. □

Sats 2. *När det är färre än sju kort kvar, så är antalet av varje geometrisk form jämn.*

Bevis. Det totala antalet av varje geometrisk form bland alla kort är 32. Eftersom varje spelare lägger undan ett jämnt antal av varje geometrisk form, så måste det återstå ett jämnt antal när spelet är slut. □

Lite fakta om spelet

Spelet Zero sumZ är konstruerat av Alejandro Erickson, Mathieu Guay-Paquet och Jonathan Lenchner.