

Tävling och acceleration för utveckling av matematisk förmåga – en analys av matematiskt begåvade elevers erfarenheter av stödjande verksamheter

V Gerholm

Sammanfattning

Artikeln presenterar resultatet från en enkät och intervjustudie med 27 finalister från en nationell matematiktävling för gymnasieelever. En utgångspunkt för studien är att matematisk förmåga inte är statisk utan i hög grad förändringsbar och att utveckling sker genom matematisk aktivitet. Syftet med studien var att undersöka omfattningen av de matematiska verksamheter som eleverna deltagit i under sin skolgång och vilken betydelse eleverna tillmäter dem. Generellt uttalar sig eleverna positivt om de verksamheter de deltagit i. Detta gäller i synnerhet acceleration i ämnet samt tävlingsmatematik som anses särskilt betydelsefulla. Studien indikerar att verksamheter som erbjuder ett ramverk att förhålla sig till och där progressionen synliggörs, i högre utsträckning uppskattas av eleverna. Sådana verksamheter kan till exempel innebära att eleverna ges möjlighet accelerera i ämnet eller att de erbjuds att arbeta med tävlingsproblem.

Nyckelord: accelererande undervisning, berikande undervisning, matematiskt begåvade elever, matematikundervisning, tävlingsmatematik



Verner Gerholm är licentiand i forskarskolan för ämnesdidaktik vid Stockholms universitet. Studierna bedrivs på Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik, MND. Parallellt med studierna arbetar han på Nacka gymnasium och undervisar i samhällskunskap och matematik.

Abstract

The article presents the results from a questionnaire and interview study of a total of 27 finalists in a national mathematical competition for students in Swedish upper secondary schools. A presumption for the study is that mathematical ability is highly mutable and that mathematical activity is necessary to enable development. The aim of the study was to investigate to what extent the students had participated in various mathematical activities during their years in school and what impact the students attach to these activities. Generally the students were positive about the activities they had participated in. Specifically acceleration in the subject and mathematical competitions stand out as particularly significant activities according to the students. The study shows the significance of mathematical activities providing a framework to relate to, which will make the progression more visible for the students. Such activities could be mathematical competition problem solving or acceleration in the subject.

Keywords: acceleration in mathematics, enriching teaching, gifted education, mathematical activities, mathematic competition, mathematics education, mathematically gifted students

Introduktion

Intresset för undervisning av matematiskt begåvade elever har ökat markant de senaste åren i Sverige. Det märks bland annat på ökad forskning på området (Dahl, 2011; Mattson, 2013; Pettersson, 2011; Szabo, 2013) samt införande av spetsutbildningar på gymnasiet 2009 (Skolverket, 2014) och högstadiet 2012¹ (Skolverket, 2015b). Regeringens beslut 2014 att ge Skolverket i uppdrag att "stimulera och stödja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever" (Utbildningsdepartementet, 2014), vilket resulterade i skolverkets stödmaterial "Att arbeta med särskilt begåvade elever" (Skolverket, 2015a), är också tecken på ökad medvetenhet om situationen för begåvade barn och ungdomar. 2014 publicerade också Sveriges kommuner och landsting ett förslag till handlingsplan för att möta särbegåvade elever i skolan (Sveriges kommuner och landsting, 2014).

Det finns två huvudargument för att ett utbildningssystem ska organiseras för att möta de mest begåvade eleverna (Nevo & Rachmel, 2009). Först och främst individskälet: begåvade elever har lika stor rätt till personlig utveckling som andra elever. Det går långt ifrån alltid bra för begåvade elever och elever med fallenhet för skolämnet presterar ofta inte efter sin förmåga (Mönks & Ypenburg, 2009). Än värre är att eleverna, i de fall då skolan inte kan möta dem på deras nivå, löper en betydande risk att uppleva skolan som tråkig och ointressant eftersom de redan behärskar det som de förväntas att lära in (Mönks & Ypenburg, 2009). Matematiskt begåvade elever är i sammanhanget inget undantag (Pettersson & Wistedt, 2013). De kan känna sig frustrerade och det är inte ovanligt att de hamnar i konflikt med lärarna (Winner, 1999). Vidare kan de bli omotiverade, lata och bråkiga (Ziegler, 2010) eller dölja sina förmågor för att bättre passa in i den rådande klassrumsnormen (Pettersson & Wistedt,

¹ Det finns idag (2015) 20 spetsutbildningar på gymnasiet varav fyra har inriktning matematik och tio högstadieskolor med matematisk spetsutbildning.

Gerholm

2013). Det andra argumentet, som intelligensforskaren L.H. Terman anförde redan för snart 90 år sedan, handlar mer om samhället och går i korthet ut på att ett samhälles resurser av intellektuell begåvning har stor betydelse för den mänskliga välfärden och måste tas tillvara för allas bästa (Nevo & Rachmel, 2009).

I den svenska skolan har det första argumentet på senare år vunnit gehör. I den nu rådande skollagen fastslås att alla barn och ungdomar har rätt att utvecklas efter sina förmågor:

Elever som lätt når de kunskapskrav som minst ska uppnås ska ges ledning och stimulans för att kunna nå längre i sin kunskapsutveckling.

(SFS 2010:800)

Det råder alltså inte längre något som helst tvivel om vad som är skolans uppdrag gällande begåvade elever. Hur man organiserar en skola så att också dessa elever får utmaningar är en uppgift för skolhuvudman, rektor och lärare.

Även om intresset har ökat är forskning om undervisning av matematiskt begåvade barn och ungdomar fortfarande ett eftersatt område (Leikin, 2009). Forskningsfältet kunde ha överlappats av både begåvningsforskare och matematikdidaktiker, men har i stället hamnat i tomrummet mellan de olika fälten (Leikin, 2009). Sedan Krutetskii's longitudinella studie med över 200 elever (Krutetskii, 1976) har ingen större empirisk studie genomförts på området (Leikin, 2009). Det förekommer en mängd olika program och verksamheter som syftar till att stärka matematiskt begåvade elevers kunskaper, men det saknas systematiserad och rapporterad kunskap om vilka effekter och konsekvenser dessa verksamheter egentligen har för individen. För att förstå effekterna av olika former av utbildningsinsatser krävs empiriska utvärderingar av de verksamheter som förekommer (Leikin, 2009).

I linje med Leikins uppmaning syftar denna artikel till att undersöka några matematiska verksamheter som antas stödja matematiskt begåvade elever. Mer precist ska artikeln besvara följande två forskningsfrågor:

1. Hur uttalar sig matematiskt begåvade elever om de matematiska verksamheter de deltagit i under skollåren?
2. Vilka skillnader går att skönja i elevernas utsagor gällande omfattning och betydelse av deltagande i de olika verksamheterna?

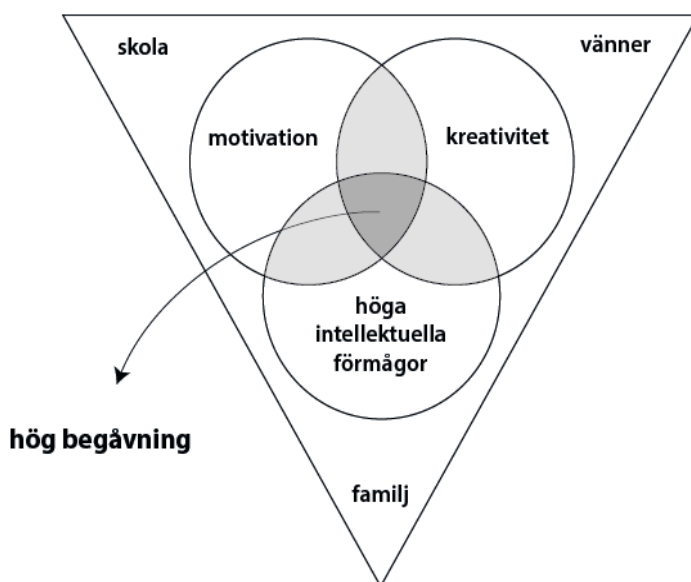
För att besvara frågeställningarna har enkäter och intervjuer genomförts med matematiskt begåvade elever i gymnasieskolan. Innan studien presenteras mer utförligt, beskrivs i följande avsnitt tidigare forskning inom området samt de teorier, modeller och definitioner som ligger till grund för studien och dess urvalskriterier.

Begåvningsmodeller

Under det senaste 100 åren har synen på begåvning och prestationsförmåga förändrats radikalt. De tidiga begåvningsforskarna hade en stark tro på intelligensen (mätt i

IQ) som förklaring till begåvning och höga prestationer, men den statistiska monokausala intelligensteorin lyckades inte på ett tillfredställande sätt förklara excellent prestationsförmåga (Ziegler, 2010). Begåvningsforskarna upptäckte att prestationer på IQ-test inte ensamt förklarar variation i begåvning inom olika domäner. Det vill säga resultaten på intelligenstester kunde inte förutsäga exceptionell prestationsförmåga inom någon domän och därigenom anpassades begåvningsmodellerna. Inom modern begåvningsforskning är man idag också tämligen överens om att begåvning inte är något statistiskt utan i hög grad utvecklingsbart (Ziegler, 2010).

En av de mest kända multikausala modellerna är Renzullis (1978) triadiska begåvningsmodell. Modellen tar hänsyn till tre, av varandra oberoende och lika viktiga, faktorer hos individen, nämligen höga intellektuella förmågor, motivation och kreativitet. En brist hos både den tidiga intelligensteorin och Renzullis modell är att de helt förbiser vikten av individens omvärld (Ziegler, 2010). Utveckling sker inte i ett socialt vakuum utan i samspel med andra människor. Med beaktande av den sociala miljöns betydelse och psykologiska utvecklingsteorier samt Renzullis teori som grund skapade Mönks sin triadiska interdependensmodell (Mönks & van Boxtel, 1985). Modellen, som alltså är teoretiskt grundad, tar hänsyn till två triader av faktorer som sinsemellan är ömsesidigt beroende av varandra (interdependenta). Den första triaden består av de kognitiva faktorer som Renzulli betonade: höga intellektuella förmågor, motivation och kreativitet (se bild 1). Den andra triaden utgörs av de viktigaste sociala områdena för en ung individ: hemmet, skola och vänner (peers). Det är när dessa sex faktorer samspelar väl som begåvning kan utvecklas och höga prestationer kan förverkligas (Mönks & van Boxtel, 1985).



Figur 1. Mönks triadiska interdependensmodell (ur Mönks & Ypenburg, 2009). Bilden illustrerar hur en individs begåvningsutveckling påverkas av både kognitiva och sociala faktorer. Dessa är i sin tur ömsesidigt beroende av varandra, interdependenta. Modellen visar de två triaderna, de kognitiva förmågorna är illustrerade med cirklar, och de viktiga sociala faktorerna är illustrerade i den omgivande triangeln.

Gerholm

Med höga intellektuella förmågor avses vanligtvis att intelligensen ligger klart över genomsnittet, vilket ofta mäts med ett intelligenstest (Mönks & Ypenburg, 2009). Med motivation (på engelska "task commitment"), avser Mönks i sin modell förmågan att fullfölja påbörjade uppgifter, lusten att lösa uppgifter samt också förmågan att sätta upp långsiktiga mål och planer (Mönks & van Boxtel, 1985). Kreativitet innebär i modellen bland annat förmåga att lösa problem på ett originellt sätt, men också att finna spännande problem i sin omgivning samt självständigt och produktivt tänkande. (Mönks & Ypenburg, 2009)

Mönks betonar vikten av de närmaste sociala relationerna för en individs utveckling:

"... ett gott socialt utbyte med framför allt familj, skola och vänner [...] är oundgängligt för en sund utveckling."

(Mönks & Ypenburg, 2009, s. 27)

Mönks anser också att man i stället för vänner egentligen bör tala om "peers" eftersom en "peer" är en person som befinner sig på samma utvecklingsnivå. Viktigt att notera är att Mönks begåvningsmodell är av generell karaktär och kan sägas gälla begåvning inom flera olika domäner varav matematik är en. De sociala faktorerna är också mycket omfattande, delvis överlappande och täcker stora delar av en ung människas sociala miljö.

Mönks flerfaktormodell låg till grund för intervjuguiden som användes vid studiens datainsamling. Innehållet i denna artikel begränsas i enlighet med syftet till verksamheter inom den sociala faktorn "skola". Fokus ligger dock inte på ordinarie undervisning utan på särskilda verksamheter utformade för att stödja och stimulera matematiskt begåvade ungdomar.

Matematiska förmågor och matematiskt begåvade ungdomar

Ett ramverk som beskriver vad som kännetecknar matematiskt begåvade elever är det som utvecklades av den ryske psykologen och forskaren V.A. Krutetskii (1976). Modellen är resultatet från en longitudinell studie som han ledde mellan åren 1955 och 1966. Trots att forskningsresultaten är snart 50 år gamla är de fortfarande aktuella och resultaten från studien används med framgång av flera forskare på området (Dahl, 2011; Leikin, 2010; Pettersson, 2011; Subotnik, Pillmeier, & Jarvin, 2009; Szabo, 2013). Krutetskii:s studie är en kartläggning av den matematiska förmågans struktur vid matematisk problemlösning. I studien identifierades flera matematiska förmågor som samverkar med varandra. De förmågor som identifierades i studien var:

- A. Förmågan att insamla och formalisera matematisk information
 - till exempel förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.
- B. Förmågan att bearbeta matematisk information
 - till exempel förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av

- kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
- förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,
- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att minnas matematisk information

- så kallat matematiskt minne, det vill säga ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en allmän och sammansatt förmåga, som manifesteras i ett matematiskt sinne.

(Krutetskii, 1976, ss. 350-351) i översättning av (Szabo, 2013, ss. 27-28)

Det visade sig i Krutetskii's studie att de duktigaste eleverna hade väldigt olika profil gällande de matematiska förmågorna så till vida att ett problem som en elev löste visuellt kunde en annan lösa genom logiskt resonemang. Krutetskii är också noggrann med att poängtera att förmågorna ingalunda är statiska utan att de utvecklas i och genom matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976). Möjligheten att utvecklas överensstämmer, som tidigare nämnts, med rådande begåvningsforskning (Ziegler, 2010). Enligt denna förklaring föds man alltså inte begåvad, utan snarare med ett anlag att utveckla begåvning. Ingen blir heller begåvad utan att delta i matematiska aktiviteter.

Med matematiskt begåvade elever förstås i denna artikel elever som i hög utsträckning använder ovanstående förmågor i matematisk problemlösning. Värt att poängtera är dock att en elev inte behöver använda sig av samtliga förmågor vid problemlösning för att betraktas som matematiskt begåvad (Krutetskii, 1976). Genom att observera elever när de ägnar sig åt matematik kan man identifiera de förmågor som kommer till uttryck i den matematiska aktiviteten och därigenom kan elevernas matematiska begåvning verifieras (Pettersson & Wistedt, 2013). Förhållande mellan Mönks teoretiskt grundade modell och Krutetskii's empiriska beskrivning av den matematiska förmågans natur är att den senare preciserar hur matematisk förmåga kommer till uttryck. Den bakomliggande idén är alltså att när de sex faktorer som Mönks nämner samspelar har individen möjlighet att utveckla matematisk förmåga såsom Krutetskii beskriver det.

Att utveckla förmågor

För att utveckla förmågor inom en specifik domän krävs att individen medvetet övar sig i syfte att förbättra prestationsförmågan, vilket brukar benämnas "deliberate practice". Träningen måste också anpassas efter individen och ligga precis ett steg över hennes nuvarande förmåga (Ziegler, 2010).

Denna träning får merparten av alla barn genom att följa ordinarie undervisning. För att också begåvade barn och ungdomar ska få träning inom sin begåvningsdomän

kan stödsinsatser utöver ordinarie undervisning behöva sättas in (Mönks & Ypenburg, 2009). I litteraturen är det främst två olika insatser som brukar nämnas när det gäller skolans stöd till särbegåvade elever - accelerering och berikning. Accelerering innebär att eleven får arbeta sig igenom lärostoffet i snabbare takt än sina klasskamrater och/eller flytta fram en eller flera årskurser. Berikning innebär att eleven får ta del av ett utvidgat eller fördjupat lärostoff (Mönks & Ypenburg, 2009). Hur accelerationen och berikningen i praktiken organiseras varierar stort.

Det finns vetenskapligt stöd för att olika former av accelerering har en positiv effekt på matematiskt begåvade ungdomar (Sowell, 1993). Det finns också ett visst stöd för att matematiskt begåvade ungdomar gynnas av homogena grupper, men denna effekt av nivågruppering verkar inte gynna elever med mer normal begåvning (Hunt, 1996).

Ziegler (2010) bekräftar effekterna av accelerering och prestationsgruppering och menar att det generellt för begåvade barn också finns positiva effekter av berikning. I Sowell (1993) sammanställning över stödåtgärder för matematiskt begåvade ungdomar syns dock inga tydliga positiva effekter av berikning.

I antologin "Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Student" sammanfattar Leikin (2009) nio verksamheter som matematiskt begåvade elever bör erbjudas för att få möjlighet att utvecklas optimalt. Med verksamhet menas här en organisatorisk indelning av sammanhang där man ägnar sig åt olika matematiska aktiviteter som till exempel problemlösning och bevisföring. Dessa aktiviteter kan vara berikande, accelererande eller både och. Leikins lista med verksamheter ligger till grund för studiens analys och presenteras utförligare längre fram i artikeln.

Tävling som verksamhet för att utveckla och öka intresse för matematik

Det finns flera olika former av matematiktävlingar. Man kan tävla individuellt eller i lag, lösningarna på problemen kan ges med flervalsoalternativ eller beräkningar på papper, bedömningen av svaren kan ske av eleven själv i klassrummet eller av en extern bedömningskommitté som tar hänsyn till en mängd faktorer. Varianterna är många och kanske är ordet tävlingsmatematik egentligen ganska missledande. Syftet från organisatörernas sida handlar sällan om att kora den bästa matematiska ungdomen. Snarare handlar det om att öka matematikintresset, utveckla problemlösningss-förmåga och erbjuda möten mellan matematikintresserade ungdomar. Kängurutävlingens syfte "att stimulera intresset för matematik genom bra problem som är tänkta att väcka nyfikenhet och lust att lära matematik" (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015) är ett exempel på detta och den internationella matematikolympiaden, som syftar till att förena matematikintresserade ungdomar världen över och låta dem uppleva utmanande matematik i en anda av vänskaplig konkurrens är ett annat (International Mathematical Olympiad Foundation, 2015).

Problemlösning är helt centralt inom tävlingsmatematik och tävlingsproblemen som förekommer i olympiaden (International Mathematical Olympiad Foundation, 2015) har mycket gemensamt med de problem som Krutetskii (1976) använde i sin studie. Problemen är inte av standardkaraktär och kräver inte heller kunskaper utöver elevens förväntade utbildningsnivå. Det går alltså utmärkt att ägna sig åt "tävlings-

matematik” utan att för den skull vara intresserad av själva tävlandet.

I denna studie används Skolornas matematiktävling som hjälp för att identifiera matematiskt begåvade ungdomar. Tävlingen anordnas av Svenska matematikersamfundet och riktar sig till landets gymnasieelever (elever i årskurs nio kan beviljas dispens). Deltagarna, cirka 1000 elever per år, skriver först en kvaltävling på sin skola. Därefter skickas lösningarna till tävlingskommittén som bedömer elevernas lösningar. De 20 till 30 bästa eleverna erbjuds att skriva en finaltävling som genomförs på någon av landets universitet eller högskolor. Efter finalen erbjuds samtliga finalister att delta i en distanskurs, den så kallade korrespondenskursen, vilken leds av matematiker från matematikersamfundet. Efter avslutad korrespondenskurs väljs de sex bästa ungdomarna ut att representera Sverige i den internationella matematikolympiaden, IMO (Svenska matematikersamfundet, 2014).

Skolornas matematiktävling utgör ett exempel på matematisk verksamhet och jag har i studien utgått från att de ungdomar som tagit sig till final samtliga är att betrakta som matematiskt begåvade enligt definitionen ovan. Jag har däremot inte själv verifierat deras matematiska förmågor. Värt att poängtera är att matematiskt begåvade elever som inte tävlar per definition inte omfattas i studien.

Material och metod

Enkät och intervjustudie

I denna artikel presenteras ett delresultat från en större studie med syftet att undersöka matematiskt begåvade ungdomar med avseende på Mönks (1985) flerfaktormodell. Benjamin Blooms (1985) expertstudie på 120 världsledande individer inom matematik, neurologi, tennis, simning, piano och skulptur stod som inspirationskälla till studien, men det bedömdes på ett tidigt stadium som alltför resurskrävande att samla in data från flera personer än ungdomarna själva, något Bloom gjorde i sin studie. Detta ledde till forskningsfrågor som tar sin utgångspunkt i individens uppfattning om världen, vilket i sin tur motiverar metodvalet. Tidigare forskning pekade inte tydligt ut svarsalternativ inom de områden som skulle undersökas, men modellens faktorer är relativt väl avgränsade (skola, vänner, familj, motivation). Kvale och Brinkman är tydliga med att intervju i allra högsta grad lämpar sig vid dessa typer av forskningsfrågor: *”[D]en kvalitativa forskningsintervjun söker förstå världen från undersökningspersonens synvinkel, utveckla mening ur deras erfarenheter ...”* (Brinkman & Kvale, 2009, s. 17). Även Blooms erfarenheter efter fyra års forskning på utvecklandet av förmågor i världsklass styrker intervjun som datainsamlingsmetod: *”[...] we acquired greater and greater confidence in the value of the retrospective-interview approach to the study of talent development.”* (Bloom, 1985, s. 16). Dessa övervägande låg till grund för att välja intervju som huvudmetod i studien.

Med ovanstående resonemang om metodval samt med min definition av matematiskt begåvade elever som utgångspunkt presenteras nedan urvalsprocess och datainsamlingsmetod. Den empiriska delen av studien inleddes med en pilotstudie i syfte att få underlag till enkätstudie och intervjumall. Utifrån pilotstudiens resultat

och Mönks flerfaktormodell konstruerades därefter enkät- och intervjumall. Hösten 2013 skrev 975 elever kvaltävling i Skolornas matematiktävling och av dessa gick 29 vidare till final. De 29 finalisterna fick efter finaltävlingen fylla i en enkät som utöver grunddata innehöll frågor om elevernas familjesituation, skolgång, betyg och vad som motiverade dem att lära sig matematik. 27 finalister valde att fylla i enkäten och två avstod.

Utifrån enkätsvaren valdes 16 finalister ut till intervjustudien. Respondenterna till intervjustudien valdes för att uppnå bredd bland de intervjuade i syfte att få en så nyanserad och rik bild som möjligt. Respondenterna valdes alltså utifrån de skillnader i pedagogisk miljö som framkom i enkätsvaren, till exempel om de hade föräldrar med eller utan akademisk utbildning, om de gick på ett spetsgymnasium i matematik eller i en vanlig klass. 16 finalister valdes med avseende på de skillnader som fanns i gruppen, antalet var inte bestämt på förhand. Urvalet till intervjustudien kan alltså inte anses vara representativt, snarare är det ett strategiskt urval utifrån principen maximal variation, vilket är en användbar metod för urval vid undersökningar som handlar om individers olika uppfattningar (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, & Wängnerud, 2007). Slutsatserna av undersökningens resultat kan med detta urval antas omfatta fler olika uppfattningar av verksamheterna än om respondenterna i alla avseenden hade liknat varandra avseende på kön, betyg, matematikklass med mera.

Tematiskt strukturerade intervjuer

15 av de 16 utvalda ungdomarna intervjuades under tidsperioden januari till april 2014 (en elev avböjde på grund av tidsbrist). Intervjuerna genomfördes på finalisternas respektive skolor och varade mellan 30 och 75 minuter. Intervjuerna bandades och transkriberades utom i ett fall där anteckningar togs då respondenten inte ville bli inspelad. Deltagare och skolor i studien har i artikeln fått fingerade namn med hänsyn till elevernas integritet.

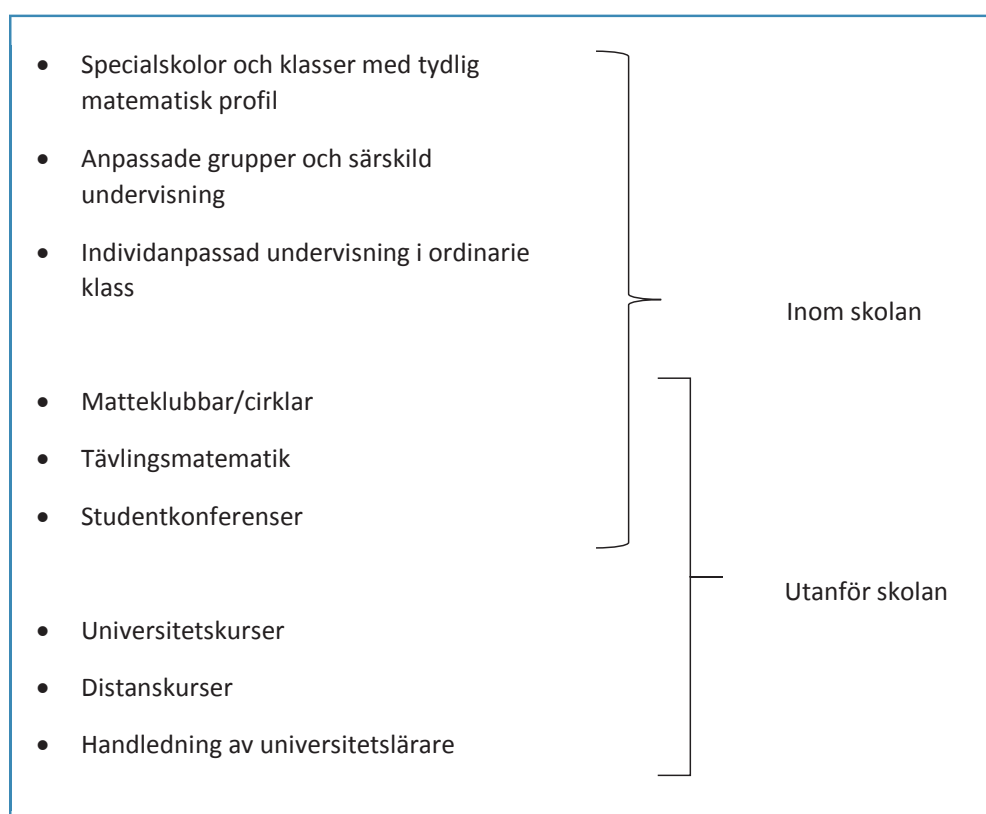
Intervjuerna var tematiskt strukturerade. Efter inledande frågor om känslan av att gå till final och vad de mindes av matematiktävlingen ställdes frågor utifrån fyra av sex faktorer från Mönks (1985) interdependensmodell (se bild 1). De fyra faktorerna som ingick i intervjuerna var familj, vänner, skola och motivation². Frågorna berörde bland annat: inställning till matematik i familj och vänskapskrets, vad som motiverade eleverna till att studera matematik, hur skolgången hade sett ut och vilka matematiska verksamheter eleven hade deltagit i. Stor hänsyn togs till de individuella skillnaderna hos elevernas personlighet, vilket innebar att intervjuerna trots att de behandlade samma faktorer skilde sig både i tid och omfattning. Frågeformulering och ordningen frågorna ställdes i skilde sig alltså åt mellan intervjuerna, men temana var desamma. I denna artikel behandlas bara den del av studien som berör matematiska verksamheter.

² Kreativitet och höga intellektuella förmågor utelämnades från intervjun. Detta eftersom faktorerna dels är svåra att undersöka i en intervjusituation och dels är svåra för individen att ha en adekvat uppfattning om

Analys

Med verksamhet avses i denna artikel en organisatorisk indelning av sammanhang där man ägnar sig åt olika matematiska aktiviteter, som till exempel problemlösning och bevisföring. I detta arbete analyseras endast verksamheter utöver ordinarie skolundervisning.

För att analysera intervjuerna användes Leikins (2009) kategorisering av matematiska verksamheter. Verksamheterna har dock modifierats under analysens gång för att bättre passa svenska förhållanden och för att bättre svara mot det svenska skolsystemet och studiens datamaterial. Verksamheterna som beskrivs nedan ordnas efter huruvida de bedrivs inom skolan, utanför skolan, eller både inom och utanför skolan (se figur 2).



Figur 2: Verksamheter som stödjer utvecklingen av elevers matematiska förmåga. En bearbetning av Lenkins kategorisering av matematiska verksamheter (2009).

Verksamheter inom skolan

Specialskolor och klasser med tydlig matematisk profil

Denna verksamhetskategori innefattar alla former av skolundervisning där en klass eller skola har en tydlig inriktning mot matematik. De tydligaste exemplen är de riksrrekryterande spetsklasserna på högstadiet och gymnasiet som har inriktning matematik, men även mer lokalt anpassade skolor och profilklasser faller inom ramen för

Gerholm

denna verksamhet. Naturvetenskapsprogrammet på gymnasiet är det program som innehåller flest obligatoriska matematikkurser och kan därför också ses som en profilering mot matematik, om än inte lika tydlig som spetsgymnasierna.

Anpassade grupper och särskild undervisning

Särskilt utformade skolverksamheter, som kan rymma olika typer av undervisningsformer, räknas hit. Gemensamt för dem är att elever lyfts från ordinarie matematikundervisning för att få extra träning tillsammans med andra elever. All undervisning sker under överinseende av en matematiklärare eller matematiker. Innehållet fokuserar skolkurser, men kan vara både accelererande (grundskoleelever som läser in gymnasiekurser) eller i form av nivågruppering (de bästa på en skola får läsa kursen tillsammans).

Individanpassad undervisning i ordinarie klass

Denna verksamhet innebär att den matematiskt begåvade eleven deltar i ordinarie undervisning, men arbetar i egen (snabbare) takt eller med andra uppgifter än övriga i klassen (till exempel problem från tävlingsmatematik). Här återfinns alltså hela spännvidden från elever som tillsammans med sin lärare tagit fram en tydligt utpekad plan till elever vars lärare låter dem göra vad de vill, eftersom de redan kan kursinnehållet.

Verksamheter inom eller utanför skolan

Matematikklubbar och studiecirklar

Detta är en bred kategori som innefattar olika verksamheter som riktar sig till matematiskt intresserade individer. Klubbarna kan existera och organiseras på eller utanför skolan dag och kvällstid. Innehållet har ingen tydlig koppling till läroplanernas kurser. Strukturen kan variera från löst sammansatta grupper till mer styrda studiecirklar med en tydligt utpekad ledare. Syftet med klubben/cirkeln behöver inte ha en tydlig progression eller i förväg utpekad innehåll.

Tävlingsmatematik

Kategorin innebär deltagande i olika matematiktävlingar, individuellt eller i grupp. Det finns en mängd olika matematiktävlingar att välja bland: lokala skolmästerskap, Kängurutävlingen³, regionala grupp/klasstävlingar, nordiska mästerskap, olympiader m.m. Även rena tävlingsmatematiska träningsläger förekommer.

Studentkonferenser

Studentkonferenser är arrangerade matematikträffar för ungdomar som syftar till att stimulera matematisk nyfikenhet och föra samman elever med intresse för matema-

3 Kangourou sans Frontières är en internationell rörelse som varje år genomför en tävling som riktar sig till elever på alla nivåer. Det är alltså inte en elittävling. (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015)

tik. I Sverige finns bland annat Sonja Kovalevsky dagarna och interna konferenser hos vissa skolhuvudmän.

Verksamheter utanför skolan

Universitetskurser

Elever i grundskolan och gymnasiet kan läsa kurser på universitet eller högskola. Formellt kan elever inte antas till högskolan innan de har en gymnasieexamen, men detta löses vanligen genom lokala överenskommelser. Eleverna kan därför inte få högskolepoäng dokumenterade innan de har gymnasieexamen.

Distanskurser

Till denna kategori räknas kurser med undervisning på distans, som inte är universitets- eller högskolekurser. Idag bedrivs oftast distanskurser i form av webbkurser med inslag av både föreläsningar, seminarier och chattar, vilket gjort att kursformen närmast sig den traditionella undervisningen. Sommarkurser i problemlösning och Matematikersamfundets korrespondenskurs är två exempel på distanskurser.

Handledning av universitetslärare

Denna verksamhetskategori innebär att en elev regelbundet träffar en universitetslärare och får handledning av denne. Många elever träffar disputerade matematiker på sin gymnasieskola, men då syftet inte är handledning av en enskild elev utan undervisning av en grupp, exkluderas dessa fall här. Däremot faller handledning av gymnasiearbete och privatundervisning i hemmet inom ramen för verksamheten.

Resultat

Bakgrundsdata från enkätstudien

27 finalister besvarade enkäten och av dem var 21 män och sex kvinnor (se tabell 1). 13 gick i årskurs två och 14 i årskurs tre på gymnasiet. 25 elever läste naturvetenskapsprogrammet och av dessa läste 18 ett program med matematikprofil övriga sju läste annan profilinriktning eller vanligt naturvetenskapligt program. Två elever läste på International Baccalaureate, IB.

Av de 27 eleverna som deltog i enkätundersökningen hade 25 föräldrar med akademisk utbildning. 23 finalister uppger att de haft något eller stort stöd av sina föräldrar eller annan närstående för sin matematiska utveckling. Fyra anser sig inte ha fått något stöd alls för sin matematiska utveckling, varken av sina föräldrar eller av någon annan nära anhörig.

Generellt sett kan eleverna anses vara högpresterande då samtliga har högsta betyg i matematik och 24 av 27 uppger att de har A eller B i alla eller nästan alla ämnen.

		Enkätstudie (n=27)	Intervjustudie (n=15)
Kön	Män	21	10
	Kvinnor	6	5
Årskurs	Årskurs 2 gymnasiet	13	7
	Årskurs 3 gymnasiet	14	8
Program	Naturvetenskapsprogrammet (ordinarie eller annan inriktning än matematik)	7	6
	Naturvetenskapsprogrammet med matematikinriktning	18	7
	IB - International Baccalaureate	2	2
Utbildningsnivå föräldrar	Två föräldrar med akademisk utbildning	21	11
	En förälder med akademisk utbildning	4	2
	Ingen förälder med akademisk utbildning	2	2
Anhörigas betydelse för matematisk utveckling	Föräldrarna eller annan närstående mycket viktiga för matematisk utveckling	11	8
	Annan närstående lite viktig för matematisk utveckling	12	5
	Ingen närstående viktig för matematisk utveckling	4	2
Betyg matematik	Högsta betyg i alla matematikkurser	27	15
Betyg andra ämnen	A eller B i alla eller nästan alla ämnen	24	13
	A i matematik, men i övrigt blandade betyg	3	2

Tabell 1. Sammanställning av bakgrundsdata över deltagarna i studien. Av de 975 deltagarna i Skolornas matematiktävling 2013 gick 29 elever till final, 27 av dessa finalister deltog i enkätstudien, 15 av dem deltog även i intervjustudien.

Elevers utsagor om matematiska verksamheter

Nedan presenteras resultatet utifrån de nio verksamheter som användes vid analysen av datamaterialet. Resultatet kommer huvudsakligen från intervjuerna, men har kompletterats med enkätsvaren för att ge en bättre helhetsbild. Verksamheterna är grupperade enligt studiens kategorisering, det vill säga utifrån om de genomförs inom skolan, inom eller utanför skolan eller endast utanför skolan.

Verksamheter inom skolan

Specialskolor och klasser med tydlig matematisk profil.

I enkätundersökningen framkommer att de flesta eleverna gått i vanliga grundskolor. Sju av 27 uppger dock att deras grundskola haft någon form av naturvetenskaplig/matematisk inriktning. Av de 15 som intervjuades kan fyra sägas gått specialklass i grundskolan (Jonas, Tomas, Elsa och Sarah). Jonas och Tomas gick i ett vanligt hög-

stadium men i en klass med naturvetenskaplig profil. Elsa gick grundskolan utanför Sverige i en utbildning som fokuserade på att lyfta fram de bästa eleverna. Elsa berättar:

"Det finns en examen i slutet av grundskolan och en annan i slutet av gymnasiet så alla fokuserar på att få bra betyg i examen så min skola gjorde så att de femtio bästa i varje årskurs fick extraundervisning [Elsa rankades alltid topp 1 av 270]. Då hade vi lektion på lördag och söndag också, men det var inte bara matte."

Elsas skola var ingen uttalad matematisk specialskola, men i jämförelse med svenska skolor kan den anses vara en specialskola.

Sarah berättar i sin intervju att hon började i Kunskapsskolan i årskurs sex. Hon fick där möjlighet att helt och hållet utvecklas i sin egen takt, vilket hon uppskattade mycket.

"För mig passade Kunskapsskolan. De har ett helt annat arbetssätt. Man jobbade i egen takt och fick hjälp av lärarna om man behövde och så bestämde man sitt eget schema själv. Det passade mig utmärkt."

Kunskapsskolan är inte en skola med särskild matematisk inriktning, men det pedagogiska upplägget innebär stora möjligheter till individuella anpassningar.

På gymnasiet är det betydligt fler som valt ett program med matematisk inriktning. 25 av 27 uppger i enkäten att de går på naturvetenskapsprogrammet och av dem läser 18 på matematiskt spetsgymnasium eller i en klass med matematikprofil. De två som inte läser naturvetenskapligt program läser på IB. Samtliga intervjuade uppger att de trivs på sitt gymnasieprogram. Kunniga lärare, klasskamrater med samma intresse och fler utmaningar totalt sett (även om matematiken ofta fortfarande uppfattas som lätt) är skäl som anförs för att gymnasiet är bättre än grundskolan. Tomas som går på ett spetsgymnasium berättar att han är nöjd med både elever och lärare:

"Det viktigaste är eleverna tycker jag. Vi möts mellan årskurserna i elevföreningar och umgås mycket. Och det är väldigt duktiga klasser och man får vara en del av en ambitiös studiemiljö. Våra mattelärare är jätteduktiga.[...] så jag är nöjd och ångrar inte mitt val på något sätt."

Adrian som läser på naturvetenskapsprogrammet med matematikprofil tycker också att gymnasiet är bättre än grundskolan:

"På gymnasiet har det varit mycket bättre, men det är nog för att jag går matteinriktning. [...] Dels har jag en mattelärare som kan hjälpa mig och dels håller jag på med andra uppgifter än tidigare. Det är fortfarande inte så att skolan har gett mig en tydlig väg att sikta på, men det har Skolornas matematiktävling gett mig."

Gerholm

Anpassade grupper och särskild undervisning

I intervjuerna framkommer att 6 av 15 har fått anpassad undervisning under sin skolgång. För fyra av dessa sex handlar det om att få läsa första gymnasiekursen (Ma A eller Ma 1c) redan i grundskolan. Emil läste de första åtta åren tillsammans med sina klasskamrater, men ”i mitten av nian började vi och slutförde första kursen i gymnasiet” sedan dess har Emil legat en kurs före sina klasskamrater under hela gymnasietiden.

Daniel är den enda av de intervjuade som fått specialundervisning genom hela grundskolan och också en av dem som läst flest universitetskurser. Han berättar om hur han tidigt tilläts accelerera i grundskolans matematikundervisning:

”Och sedan har jag haft väldigt bra lärare som varit jätteviktiga. Redan i 1-5 skolan fick jag träffa en lärare ensam och göra min egen matte. [...] Sen var jag klar med högstadiet i fyran och i femman började jag här på Arbetarskolan, i Mattegruppen. Jag tror att jag gjorde så att jag gick hit en gång i veckan [...] och så gjorde jag normal NV-takt. Jag läste Ma A och B i femman C och D i sexan, E i sjuan.”

En av dem som velat läsa mer i grundskolan men som inte fick den möjligheten är Christian ”Jag hade velat läsa mer i högstadiet, men det gavs inte möjlighet.” en uppfattning som delas av Carina ”om det funnits [möjligheter att läsa in extrakurser] hade jag absolut gjort det.”

Individanpassad undervisning i ordinarie klass

De intervjuades utsagor visar på en stor variation gällande undervisningen i klassrummet. Visserligen har de flesta (11 av de 15) intervjuade periodvis fått berikning eller givits möjlighet att accelerera genom kurserna, men det har saknats en tydlig plan både från lärarens sida och i skolans organisation, vilket gjort att tidigare försprång i en matematikkurs bromsats av läraren, andra ämnen eller av lättja hos eleven. När eleverna tillåtits att accelerera är det tydligt att många uppskattar det. Niclas räknade i samma takt som sina klasskamrater fram till jullovet i gymnasiets första årskurs då han satte fart:

”Jag gjorde klart den [1c boken] tills lite före jul, sedan fick jag 2c-boken och gjorde klart den under jullovet, sedan fick jag 3c-boken och gjorde klart den under våren och så hann jag göra kurs D och E under våren i ettan.”

Niclas lärare uppmuntrade Niclas att accelerera, men flera av respondenterna har upplevt motsatsen. Rafaels försprång och glädjen i att jobba försvann i högstadiet:

”Jag och en kompis började med åttans mattebok i sexan. Jag kom inte ihåg om vi gjorde hela eller inte, men sen i sjuan när vi gick upp i högstadiet tyckte vår lärare att vi skulle göra åttans bok igen och så gjorde vi den. Och i åttan tyckte han att vi skulle göra åttans mattebok igen så det stod stilla där. Rätt mycket ...”

Sarah beskriver också hur svårt det kan vara för en lärare att se och förstå det begåvade barnets behov av utmaningar:

"[läraren] sa: "Tycker du inte att det är viktigare att hjälpa dem som underpresterar? Du klarar ju dig själv". Men så är det ju inte. Hur ska en sjätteklassare veta var jag ska få utmaningar ifrån? Vissa kanske kan det, men det kunde inte jag, jag kunde inte ta hand om mig själv. Mitt intresse hade bara sjunkit. Men det fattar inte folk, att man behöver hålla igång elever med utmaningar."

Ungdomarna upplever det helt enkelt svårt att på egen hand ansvara för sin utveckling.

Verksamheter inom eller utanför skolan

Matematikklubbar och studiecirklar

Endast fem av respondenterna har deltagit i matematikklubbar. Klubbarna har sinsemellan haft olika karaktär. Christian gick på en studiecirkel som hölls kvällstid på högskolan. Initialt tyckte Christian om kursen, men tröttnade då problemen uppfattades som tråkiga. Christian säger:

"Den föreläsning som jag var på var väldigt bra. Det är ett bra koncept. Anledningen att jag slutade var att jag tappade intresset för kursen och det var lite långsamt-tempo, men det var fortfarande mycket högre nivå än här [i skolan]."

Maria träffade en av lärarna på spetsgymnasiet i en matematikklubb redan när hon gick i femte klass och det är en av anledningarna till att hon senare sökte in till gymnasiet. Daniel har inom ramen för sin specialundervisning också getts möjlighet att träna på tävlingsmatematik och diskutera problemlösning med lärarna.

Emma och Rafael går i en grupp som tillsammans med en universitetslärare en gång i veckan diskuterar problem och tävlingsmatematik. Emma förklarar "en gång i veckan går vi dit och diskuterar matematik eller olika satser och problem".

Tävlingsmatematik

Eftersom urvalet i studien består av finalister i Skolornas matematiktävling är det uppenbart att samtliga ägnat sig åt tävlingsmatematik. Av enkätsvaren framkommer att 13 av 27 elever har erfarenheter av flera olika matematiktävlingar, 11 har deltagit i någon annan tävling och att tre endast har deltagit i Skolornas matematiktävling tidigare. Ingen av finalisterna skrev tävlingen för första gången det år de gick till final. Förberedelserna inför tävlingen varierar mycket bland de intervjuade. "Jag skrev kvalificeringen för att jag tyckte det var roligt. Jag var inte så tävlingsinriktad" säger Christian om sin prestation. Adrian hade förberett sig ganska väl och var inte helt förvånad över att komma till final:

Gerholm

"Det var jätteroligt, jag hade jobbat rätt hårt med tävlingsmatematik under sommaren och även året innan. Så det var inte överraskande."

Daniel som tävlat mycket låter lite besviken över sin placering:

"Jag har varit i final två gånger tidigare så detta var min tredje gång och ja själva tävlingen var lite annorlunda än normalt – lite svårare kanske. [...] målet var ju att vinna så det var en liten missräkning kan jag säga."

Vilken roll tävlandet haft för den matematiska förmågans utveckling skiljer sig också mycket åt mellan finalisterna. För Sarah har tävlandet betytt oerhört mycket:

"Där [Kunskapsskolan i sjätte klass] blev jag också introducerad till mattetävlingar och det känns som om det är genom mattetävlingar som jag lyckats behålla intresset för mattem för där får jag verkligen utmaningar. Jag tror att jag hade tappat intresset om jag bara hade hållit på med skolmatte."

Adrian håller med om att det är utmaningarna från tävlingsmatematik som är det viktiga, för honom är inte själva tävlandet så betydelsefullt:

"Tävlingen gör att man känner någon slags status i att klara uppgiften, men just att vara bättre än andra är inte viktigt. Det hade inte gjort mig något om det hade funnits 20 andra som varit bättre än mig bara jag hade fått komma till finalen och fortsätta med korrespondenskursen. Det är det som är det roliga."

För Emil har tävlandet också betytt mycket. Både för självförtroendet och för lusten att lära sig matematik.

"Jag har fått ett högre självförtroende för matte. När vi gick i nian vann mitt lag tävlingen Pythagoras Quest. Drivkraften och viljan att jobba vidare med matte har vuxit och att träffa likasinnade som man får på finalen som också är intresserade. För så har det aldrig varit tidigare, man har träffat några stycken men aldrig på den nivån."

Återkommande i enkäterna och intervjuerna förknippas tävlingsmatematiken med stimulerande utmaningar (till skillnad från skolmatematiken), glädjen över att lösa problem och att träffa likasinnade som anledning till att eleverna vill ägna sig åt tävlingsmatematik. Några nämner också tävlingsmomentet och viljan att vara bäst.

Studentkonferenser

Endast två av respondenterna pratar om matematikkonferenser under intervjuerna, Fredrik endast i förbigående, men Sarah berättar att:

"Kunskapsskolan är bra för de har en mattespets för alla sina elever och de bästa får åka på ett träningsläger varje år i Stockholm och lära sig mer matte. De satsar verkligen på matte och problemlösning och sådana saker."

Finalen i skolornas matematiktävling är inte en konferens, men efter det att tävlingen skrivits ges möjlighet att umgås och senare på kvällen äter deltagarna middag med arrangörerna. Alla intervjuade upplever att det var roligt att träffa likasinnade som delade deras intresse för matematik. Fredriks berättelse sammanfattar finalisternas erfarenheter på ett fint sätt:

"Det var första gången jag fick tillfälle att diskutera vackra formler. Jag satt bredvid en kille på middagen efter det att vi skrivit tävlingen och vi diskuterade formler och om de var vackra eller inte. Om deras användbarhet och så. Det var väldigt roligt. Annars är jag ganska ensam om det. Man pratar ju mycket med folk, men om man pratar matte med folk så hänger de inte med och de kan inte förstå min fascination för matte."

En tolkning av detta är att intresset för konferenser finns, men att utbudet är relativt begränsat.

Verksamheter utanför skolan

Universitetsstudier utöver ordinarie skola

Av de 15 finalister som intervjuats är det endast två som läst kurser på universitetsnivå som inte ingår i deras ordinarie gymnasieutbildning. Elva läser eller kommer att läsa linjär algebra inom ramen för sitt gymnasieprogram på universitetet eller på skolan. Två elever läser på IB och är nöjda med den matematik de får där.

De två elever som läser kurser på universitet/högskola utöver gymnasieprogrammet uppger att de är nöjda med att få läsa i egen takt, men de har inte tagit ut några högskolepoäng. Dels för att man inte får tävla i olympiaden om man har tagit ut högskolepoäng och dels för att högskolan kräver gymnasieexamen för att kunna anta elever till kurser. Daniel berättar:

"I åttan läste jag Algebra och analys på universitetet. Då åkte jag till [gymnasiet] och de hade lärare som undervisade i de kurserna. Så jag åkte bara [till universitetet] och tenterade av kurserna. I nian läste jag linjär algebra och diskret matte."

Daniel har läst 45 högskolepoäng, men satsar mest på tävlingsmatematik vid intervjutillfället för att kunna ta en plats i olympialaget.

Distanskurser

Av de intervjuade finalisterna är det bara Adrian som uppger att han deltagit i en

Gerholm

distanskurs innan finalen. Det var en sommarkurs som erbjöds alla elever som läste vid någon av regionens spetsgymnasium eller profilklass med matematikinriktning

"... men, det var nog bara fyra stycken som gick den. Den var väldigt bra. Det var typ tävlingsmatematik. Och det var fyra månaders korrespondenskurs."

Alla finalister erbjuds att delta i Matematikersamfundets korrespondenskurs, men kursen är krävande och graden av deltagande varierar. Sex av de intervjuade finalisterna uppfattade korrespondenskursen som för svår eller tidskrävande och gav sig aldrig riktigt in i kursen, fem av dem satsade fullt ut och hade vid intervjutillfället ambitionen att genomföra hela kursen. Övriga fyra intervjuade finalister påbörjade kursen, men hoppade av efter några omgångar då de tyckte att problemen blev för svåra och tidskrävande.

De intervjuade som valde att satsa på kursen ger en i stort sett entydig bild av korrespondenskursen. Den är rolig, extremt utvecklande och mycket tidskrävande.

"ja, den [korrespondenskursen] lägger jag ned jättemycket tid på och den är väldigt rolig. Jag känner att jag utvecklats mycket mer än i skolan. [...] Vi får sex uppgifter var tredje vecka. De är jättesvåra. De senaste fick jag för en vecka sedan och har inte kommit någon vart fast jag lagt ned kanske tio timmar. Och totalt blir det kanske ytterligare 30-40 timmar på två veckor" säger Adrian.

Niklas satsar också hårt på korrespondenskursen:

"[jag lägger ned] väldigt mycket tid. Det blir att man sitter på helgerna och jobbar lite, kanske 4 timmar per dag lördag och söndag och så på mattelektionerna och ibland på eftermiddagarna. [...] det blir] mellan 10 och 20 timmar/vecka"

Det finns alltså stora möjligheter till utveckling för dem som är beredda att lägga ned den tid och energi som krävs för att genomföra hela korrespondenskursen. Adrian lägger väldigt mycket status i att klara korrespondenskursens problem, vilket ger honom den vilja som krävs för att fortsätta jobba med problemen:

"[...] det beror på hur mycket status jag ser i problemet. Korrespondenskursproblemen ger jag ju inte upp. Det handlar ju om trettio timmar innan jag ger upp en uppgift. Så är det ju inte med andra problem. Ser jag ett problem på internet som verkar intressant håller jag på kanske max en timme, sen kollar jag på svaret."

Det verkar som om tävlingsmatematik och den träning som korrespondenskursen erbjuder skapar en möjlighet till sammanhang som annars är svårt att uppbringa utanför skolans kurser.

Handledning av universitetslärare

Ingen av de intervjuade finalisterna får handledning av en universitetslärare om man avser personlig vägledning inom matematiken. Dock träffar alla som går på matematiska spetsgymnasier (18 av 27) disputerade matematiker i sin undervisning, vilket de ofta uppskattar. Sarah förklarar:

"Det som är bra med våra lärare här är att de kommer från universitetsvärlden så de har perspektivet och kan berätta vad man kan satsa på och tar med oss till universitet och går in i allt både grundläggande och på djupet."

Christian kontaktade en doktorand för att få råd angående sitt gymnasiearbete, vilket han senare uppskattade:

"jag kontaktade en doktorand på KTH och fick detta rekommenderat för mig som ett område. Nu förstår jag att det här är jätteroligt och jag skulle vilja lägga så mycket mer tid på det."

Korrespondenskursen leds av matematiker så alla finalister som vill kommer i kontakt med universitetslärare, men direkt handledning är inte vanligt förekommande bland deltagarna i studien.

Verksamheternas betydelse för eleverna

Det framkommer av elevernas utsagor att omfattning och betydelse av deltagandet i de analyserade verksamheterna varierar mellan individerna. Några tydliga mönster går dock att urskilja.

Deltagarna i studien har inte gått i klasser med matematikinriktning i någon större utsträckning i grundskolan, däremot är det vanligt förekommande på gymnasiet. Samtliga ungdomar i studien, förutom de två som läste på IB, läser på naturvetenskapsprogrammet och 18 av 27 har valt en klass med matematisk inriktning. Eleverna uppfattar att de på gymnasiet har engagerade lärare med djupa ämneskunskaper, ambitiösa klasskamrater och generellt sett fler utmaningar än de hade på grundskolan.

Så gott som alla intervjuade har periodvis fått accelerera genom matematikkurserna, men många har också bromsats i sin utveckling, till exempel genom att de tvingats läsa samma kurs flera gånger, vilket uppfattats som tråkigt och meningslöst. Respondenterna uppskattar de perioder då de tillåts accelerera och de har då utvecklats fort. Det har enligt studiens deltagare berott på den enskilde läraren och skolans organisation huruvida de givits möjlighet att läsa i egen takt eller ej.

Urvalet i denna studie innebär att samtliga respondenter ägnat sig åt tävlingsmatematik i någon omfattning. Urvalmetoden har genom sin utformning alltså uteslutit matematiskt begåvade elever som inte tävlat i matematik. Det framkommer i studien att tävlingsmatematiken har haft väldigt olika stor betydelse för deltagarna. Gemensamt för alla är att de uppskattar utmaningen i tävlingsproblemen och att de får använda hela sin matematiska kunskap, till skillnad från det de uppfattar som mer

snäva problemformuleringar som de möts av i skolan. Några få tycker också om själva tävlingsmomentet. För vissa av studiens respondenter har tävlingsmatematiken betytt otroligt mycket. Det är genom denna de funnit utmaningar och lust att träna matematik flera timmar i veckan. Utan tvivel har tävlingsmatematiken och korrespondenskursen som erbjöds finalisterna varit de verksamheter som haft störst påverkan på respondenterna.

Deltagande i anpassade grupper i grundskolan har främst förekommit i nionde årskursen då eleverna har givits möjlighet att läsa gymnasiematematik i förväg. De få elever som uppmuntrats att accelerera och fått stöd av lärare har nått betydligt längre i sin matematiska utveckling och verkar mer nöjda med sin utbildning än de som följt ordinarie undervisning.

Deltagande i matematikklubbar och studiecirklar, studentkonferenser och distansstudier (korrespondenskursen undantagen) förekommer i liten utsträckning och verkar inte ha haft någon större betydelse för dessa ungdomar. Inte heller förekommer handledning av universitetslärare i någon större utsträckning bland respondenterna. Detta kan bero på att många av respondenterna träffar universitetslärare inom ramen för sitt gymnasieprogram. Endast två deltagare har läst universitetskurser utöver vad som läses på gymnasieprogrammet. Det kan i sammanhanget tyckas märkligt med tanke på att studien omfattar några av landets mest matematiskt begåvade ungdomar.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att flera av ungdomarna gärna hade velat gå fram snabbare i grundskolans kurser om det varit möjligt och om det funnits ett system som uppmuntrade det. Gymnasiet uppfattas generellt sett ge fler utmaningar även om matematiken fortfarande ofta upplevs som enkel. Respondenterna anser att tävlingsmatematiken erbjuder dem utmaningar i form av intressanta matematiska problem som hos vissa medfört att de studerat matematik i långt större utsträckning än vad skolans kurser kräver.

Diskussion

När studien sätts i sitt sammanhang är det värt att minnas att alla finalister har haft tillräckligt goda förutsättningar för att utvecklats väldigt långt matematiskt. Det vill säga: givet att Mönks modell är korrekt verkar elevers erfarenheter ha varit tillräckligt gynnsamma för att få till stånd en utveckling av de matematiska förmågorna. Därmed inte sagt att alla respondenter haft optimala förutsättningar i varje enskild faktor eller att de utvecklats maximalt utifrån sina förutsättningar. Precis som tidigare forskning visar (Mönks & Ypenburg, 2009) har även dessa matematiskt begåvade ungdomar ofta funnit skolans undervisning tråkig och meningslös. Konflikter med lärare förekommer, men ungdomarna i studien har trots detta alltid presterat på topp i matematik.

Ingen av eleverna ger uttryck för att de verksamheter som behandlats i studien har varit till men för deras matematikintresse, tvärtom. Leikins uppmaning (2009) att matematiskt begåvade elever ska erbjudas dessa verksamheter finner alltså ett visst stöd i denna studie, men betydelsen av deltagande i verksamheterna varierar. Samt-

liga verksamheter innebär någon form av acceleration eller berikning eller en kombination av dessa. Dock har de olika möjlighet att utveckla ungdomarnas matematiska förmågor och skapa förutsättningar för den, enligt Ziegler och många andra, helt nödvändiga träningen i form av "deliberate practise" (Ziegler, 2010).

Med utgångspunkt i de intervjuade elevernas perspektiv tyder studien på att de verksamheter som lett till störst utveckling och som verkar ha stimulerat ungdomarna mest är dels accelerering, genom att de har fått arbeta sig igenom lärostoffet i snabba takt eller på högre nivå än sina klasskamrater, och dels tävlingsmatematik i dess olika former. I detta avseende kompletterar studiens resultat tidigare forskning. Det finns sedan tidigare vetenskapligt stöd (Sowell, 1993; Ziegler, 2010) för att acceleration har betydelse för elevernas utveckling, vilket inte motsägs i denna studie. Men resultaten antyder också att tävlingsmatematik kan vara en berikningsform som har stor betydelse för ungdomars matematiska utveckling.

Sammanhang med tydligt synliggjord progression

Studien ger ingen förklaring till varför just dessa verksamheter, acceleration och tävlingsmatematik, sporrar till utveckling, men en gemensam faktor är att det sammanhang som dessa verksamheter skapar gör det lättare att synliggöra en progression inom ämnet. Detta gäller för eleven så väl som för läraren. Att matematikkurserna i skolan innebär progression är uppenbart: kurserna bygger på varandra och läses i en viss ordning. Tävlingsmatematiken är inte lika styrd, men det finns en tydlig progression även här, med tävlingar på olika nivåer, finaler och olympiader. Tävlingarna erbjuder på så vis ett parallellt spår till skolans kurser.

Tävlingsproblemen finns tillgängliga för alla och man måste inte tävla för att lösa dem, men det är samtidigt lätt att relatera till jämnåriga eftersom tävlingarna ofta är styrda efter ålder och förväntade förkunskaper. Vetskapen om att jämnåriga elever löser samma problem ger de tävlande en indirekt kontakt med sina "peers", vilket är en av faktorer i Mönks modell (Mönks & van Boxtel, 1985). I en undervisningsmiljö är det lätt att tänka sig att vissa elever föredrar acceleration, medan andra föredrar den berikning som tävlingsproblemen innebär. Respondenterna vittnar om att korrespondenskursens problem blir svårare ju längre kursen fortgår och eftersom många deltar flera år i följd kan de själva se att de utvecklats eftersom de klarar av flera problem. De deltagare som tränar på tidigare tävlingsproblem eller aktivt deltar i korrespondenskursen får alltså den nödvändiga träning som krävs för att utveckla sina matematiska förmågor (Ziegler, 2010).

Sommarkurser, studiecirklar och enstaka fördjupande uppgifter från läraren uppskattas av dem som deltar, men verkar enligt utsagorna ha mindre effekt på elevernas utveckling. Kanske för att dessa verksamheter inte erbjuder deltagarna tydliga mål att sträva mot. Inom de flesta domäner finns tydliga regler och en allmän acceptans för vad som räknas som goda prestationer. Individen vet då vad man tränar för, hur man tränar och varför. Hur den egna utvecklingen ska formas blir tydliggjord på ett helt annat sätt än vad den blir i mer diffust definierade berikningsverksamheter som studiecirklar och sommarkurser även om uppgifterna i princip skulle kunna vara de

Gerholm

samma.

Med tanke på urvalet av respondenter, finalister i en matematiktävling, kan man invända mot studiens relevans då dessa elever förväntas tycka matematiktävlingar är utvecklande, men resultatet visar på en intressant aspekt i förhållande till alternativa matematiska aktiviteter. Det hade varit fullt tänkbart, och kanske mer rationellt, att respondenterna hade satsat på meriterande universitetskurser eller andra ämnen för att höja sina slutbetyg och kanske någon gång per år deltagit i en matematiktävling. Men för flera av respondenterna betyder tävlingarna och dess kontext mer än skolmatematik, meriterande kurser eller höga slutbetyg.

Sammanfattningsvis kan sägas att studiens matematiskt begåvade elever uppskattar verksamheter som erbjuder dem utmaningar i ämnet, men av deras utsagor att döma verkar inte alla verksamheter ha samma potential att sporra dem till vidare utveckling. Av resultatet framkommer att acceleration och tävlingsmatematik är de verksamheter som av eleverna uppfattats ha haft störst betydelse. En möjlig tolkning av detta är att verksamheter som erbjuder ett sammanhang med tydlig progression är att föredra för att stödja utvecklingen av den matematiska förmågan hos matematiskt begåvade elever.

Referenser

- Bloom, B. S. (1985). *Developing Talent in Young People*. New York: Ballantine Books.
- Brinkman, S. & Kvale, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Dahl, T. (2011). *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: Att upptäcka förmågor i en matematisk aktivitet*. (Lic.-avh.) Växjö: Linnéuniversitetet.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan - konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Stockholm: Norstedts juridik.
- Hunt, B. (1996). The effect on Mathematics Achievement and Attitude of Homogeneous and Heterogeneous Grouping of Gifted Sixth-grade Students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, vol. 8, nr. 4, ss. 65-73.
- International Mathematical Olympiad Foundation (2015). *Activities - The organization of the International Mathematical Olympiad*. [Hämtad den 7 okt. 2015 från <http://imof.co/about-imo/activities>].
- International Mathematical Olympiad Foundation (2015). *About IMO - Vision*. [Hämtad den 7 okt. 2015 från <http://imof.co/about-imo/vision>.]
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago & London: University of Chicago Press.
- Leikin, R. (2009). Bridging Research and Theory in Mathematics Education with Research and Theory in Creativity and Giftedness. I: R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of the Gifted Students* (ss. 385-411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Leikin, R. (2010). Teaching the Mathematically Gifted. *Gifted Education Internatio-*

- nal, vol. 27, ss. 161-176.
- Mattson, L. (2013). *Tracking Mathematical Giftedness in an Egalitarian Context*. (Diss.) Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Mönks, F. J. & van Boxtel, H. W. (1985). Gifted Adolescents: A Developmental Perspective. I Freeman, J. (red.), *The Psychology of Gifted Children - Perspectives on Deleptomment and Education* (ss. 275-295). New York: John Wiley & Sons.
- Mönks, F. J., & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Nationellt centrum för matematikutbildning (2014). *Vad är Kängurun - Matematikens Hopp?* [Hämtad den 18 juni 2015 från <http://ncm.gu.se/node/1525>].
- Nevo, B., & Rachmel, S. (2009). Education of gifted children: a general roadmap and the case of Israel. I: R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Children* (ss. 243-252). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. (Diss.) Växjö: Linnaeus University Press.
- Pettersson, E. & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor - och hur de kan utvecklas*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, vol. 60, nr. 3, ss. 180-184 och 261.
- SFS 2010:800. *Skollag*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Skolverket (2014). *Redovisning av uppdrag enligt förordning (2008:793) om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning*. Dnr 2014:329. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2015a). *Att arbeta med särskilt begåvade elever*. [Hämtad den 31 maj 2015 från <http://www.skolverket.se/skolutveckling/larande/sarskilt-begavade-elever-1.230661>].
- Skolverket (2015b). *Skolor med spetsutbildning*. [Hämtad den 18 maj 2015 från <http://www.skolverket.se/skolformer/grundskoleutbildning/spetsutbildning/skolor-med-spetsutbildning-1.155768>].
- Sowell, E. J. (1993). Programs for Mathematically Gifted Studets: A Review of Empirical Research. *Gifted Child Quarterly*, vol. 37, ss. 124-131.
- Subotnik, R. F., Pillmeier, E., & Jarvin, L. (2009). The Psychosocial Dimensions of Creativity in Mathematics: Implication for Gifted Education Policy. I: R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Student*, ss. 165-180. Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.
- Svenska matematikersamfundet (2014). *Skolornas matematiktävling*. [Hämtad den 20 juni 2014 från www.mattetavlingen.se].
- Sveriges kommuner och landsting (2014). *Handlingsplan särbegåvade elever 2014*. [Hämtad den 18 juni 2014 från http://www.skl.se/vi_arbetar_med/skola_och_for-skola/matematiksatsning/nyheter/handlingsplan-for-att-mota-sarbegavade-elever].
- Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågor interaktion och det matematiska minnets*

Gerholm

roll vid lösning av matematiska problem. (Lic.-avh.) Stockholm: Stockholm universitet.

Utbildningsdepartementet (2014). *Uppdrag att främja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever.* U2014/5038/S. [hämtad den 29 mars 2016 från <http://www.regeringen.se/regeringsuppdrag/2014/09/u20145038s/>]

Winner, E. (1999). *Begåvade barn.* Jönköping: Brain Books AB.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn.* Stockholm: Nordstedts