



Utmanande problemlösning för elever i grundskolan

I Västerås pågår flera satsningar på matematikämnet och en av dem är att ge särskilt begåvade elever utmaningar genom att utveckla matematikundervisningen. Här beskrivs det arbetet utifrån implementering av begreppen rutiner, roller, verktyg och normer.

Undersökningar och forskning har det framkommit att matematikintresserade och särskilt begåvade elever sällan får tillräckligt av de utmaningar de behöver för att utveckla sin fulla potential i matematik. Det har visat sig att följden lätt blir att de tappar intresse och motivation för skolarbetet. Detta är ingen ny kunskap för oss i skolvärlden. Utmaningen är hur lärare ska lyckas identifiera dessa elever och utmana dem i klassrumsundervisningen, därför har vi i Västerås stad valt flera vägar för att stimulera elever och stötta deras lärare.

Västerås stads kommunala skolverksamheter har ett långsiktigt utvecklings-, forsknings- och samarbetsprojekt med Mälardalens högskola, *Räkna med Västerås*, Räv. Inom Räv har vi utifrån rekommendationer från internationell forskning, anpassad till den svenska kontexten, fokuserat på att implementera rutiner, roller, verktyg och normer i matematikutvecklingen på skolan och i förvaltningen. Utifrån dessa erfarenheter, övrig matematikdidaktisk forskning samt deltagande i Matematiklyftet har vi utvecklat arbetet med matematikintresserade elever.

Rutiner med träffar, kurser och möten

Begreppet rutiner definieras som återkommande frågeställningar kring nyckelfrågor i arbetet med matematikintresserade elever. Rutiner kan till exempel vara hur lärare arbetar med problemlösning i klassen, hur matematikmentorerna strukturerar utmaningsträffarna med elever och hur matematikteamet med matematikutvecklare och matematikmentorer tillsammans med lärarna skapar möjlighet för matematikintresserade elever att träffas. Vid implementering av nya rutiner är det viktigt att fråga sig varför vi vill göra på det valda sättet, vilka framgångsfaktorer utifrån forskning och beprövad erfarenhet som besluten bygger på och om det finns möjlighet att anpassa och utveckla rutinen efter verksamhetens behov. I arbetet med matematikintresserade elever har följande rutiner implementerats:



Kontinuerliga träffar för matematikintresserade elever i åk 6–9

Eleverna träffas en förmiddag varje termin för att arbeta tillsammans med utmanande matematiska problem. Första träffen hölls i oktober 2012 och idag kommer i genomsnitt 80 elever till varje träff. Syftet med problemlösningsträffarna är både att väcka intresse för utmanade matematisk problemlösning och att ge eleverna möjlighet att utveckla problemlösning- och resonemangsförmågan tillsammans med andra ungdomar på samma matematiska nivå.

Det är även tänkt att dessa träffar ska stimulera elever att delta i olika nationella matematiktävlingar samt att tillsammans med lärare jobba för att fler elever vågar utmana sig att delta. Valet av tidpunkt för träffarna ligger därför några veckor innan Högstadiets matematiktävling på hösten respektive några veckor innan Kängurutävlingen på våren. Efter träffarna skickas en kort rapport till lärarna om vad vi har gjort och vad eleverna har tyckt om innehållet i träffen. Lärarna får de problem som eleverna brottats med för att ha möjlighet att följa upp elevernas lösningar och funderingar kring problemen.

Problemlösningkurs för extra matematikintresserade elever

Kursen som vänder sig till elever i åk 9 genomfördes första gången läsåret 2016/17. Under läsåret 2017/18 är intresset så stort att det har bildats två grupper vilket medför att kursen hålls vid två olika tillfällen varje vecka. Eleverna träffas 90 minuter varje måndag respektive tisdag eftermiddag under läsåret för att gemensamt lösa utmanade matematiska problem. Detta ger dem kunskaper inför gymnasiet samt glädjen att få stimuleras i sitt matematikintresse. Syftet med den här kursen är att skapa förutsättningar för möten där matematikintresserade elever från olika skolor får utveckla sina problemlösning-, resonemang- och kommunikationsförmågor tillsammans. Det är ingen gymnasiekurs utan en kurs med inslag både från gymnasiets matematik och grundskolans högre nivå av matematik. Fokus är på talteori, geometri, bevisföring och vacker matematik så som fraktaler och vackra bevis. De deltagande eleverna får intyg efter den genomförda kursen.

Kompetensutvecklingsprogram för lärare

Den tredje och nyaste rutinen byggs upp under läsåret 2017/18. Det sker inom ramen för ett kompetensutvecklingsprogram för lärare F-åk 6 som idag undervisar särskilt begåvade elever i matematik. Inledningsvis sker detta i en pilotgrupp med fyra deltagande skolor där lärarna får möjlighet att träffas fyra gånger under läsåret. Vid dessa träffar kommer lärarna att få möta skickliga och erfarna matematikdidaktiker, skolöverläkare som värnar om de särskilt begåvade elevernas hälsa, personer som representerar stödet kring dessa elever och om det är möjligt en förälder som kan ge ett föräldraperspektiv på att ha ett matematikbegåvat barn. Tanken är också att lärarna ska få möta forskare på området, vilket kan ske via videosamtal, möten på plats eller i en storföreläsning så fler lärare och även skolledare ges möjlighet att ta del av forskarnas kunskaper. Vid första träffen i oktober deltog tio lärare.

Roller

Med begreppet roller menas i detta sammanhang befattningar på olika nivåer inom skolverksamheterna. I Västerås stads arbete för matematikintresserade elever är fyra roller av central betydelse: lärare, ämnesföreträdare i matematik på varje skola, kommunala matematikmentorer och en matematikutvecklare.

Lärare

En av de viktigaste rollerna i detta arbete är lärarna. De är länken till att elever får information, peppas till att delta samt möjliggör för elever att komma till träffarna. Lärare är då också välkomna och under träffen får de möjlighet att lära tillsammans med sina elever samt bygga nätverk med kollegor från andra skolor. Efter träffen är det lärarna som följer upp elevernas erfarenheter och de frågor som kan ha uppkommit under utmaningsträffen.

Ämnesföreträdare

En annan viktig roll är ämnesföreträdaren i matematik som finns på varje skola. Många av ämnesföreträdarna är också förstelärare. Ämnesföreträdaren är länken mellan matematikteamet och lärarna. En av deras uppgifter är att delge kollegor information om olika aktiviteter inom skolverksamheterna lokalt och nationellt. Det är de som tar emot uppgifter om vilka elever som vill delta i träffarna och skickar informationen vidare till matematikteamet. Ämnesföreträdarna är också de som leder de kollegiala samtalen under matematikkonferenserna på skolan och tillsammans med rektor leder det systematiska kvalitetsarbetet i matematik på skolorna.

Matematikmentorer

Rollen som kommunal matematikmentor innebär i arbetet med utmaningsträffarna att de tillsammans med matematikutvecklaren är ansvariga för innehållet i träffarna. I huvudsak har det varit matematikmentorer på gymnasiet, som även är förstelärare, som hållit i träffarna då de har en djup och bred kunskap om högre matematik. För mentorerna på gymnasiet har det varit värdefullt att få möjlighet att ta del av högstadiееlevers tankar och idéer kring matematisk problemlösning.

Vid två tillfällen genomförde två av Räkna med Västerås-projektets matematikmentorer/doktorander utmaningsträffen. Det gav oss som tidigare planerat och genomfört dessa träffar idéer om hur vi kunde utveckla innehållet i dem. Brobygget mellan grundskolan, gymnasiet och högskolan ser vi i Västerås som en långsiktig och strategisk verksamhetsutveckling med målet att bygga en skola på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet. Ett annat uppdrag i rollen som matematikmentor på gymnasiet är att leda problemlösningkursen för elever i åk 9. En av matematikmentorerna/doktoranderna på grundskolan kommer att delta i arbete med särskilt begåvade elever F-åk 6.

Matematikutvecklare

Matematikutvecklarrollen innebär bland annat att leda och driva utvecklingen framåt samt att planera och genomföra insatser tillsammans med matematikmentorerna. I sammanhanget kring matematikintresserade och särskilt begåvade elever är uppdraget att ge information till lärare och återkoppla med närvaro, innehåll och elevers utvärdering efter träffen och problemlösningskursen samt bjuda in elever och se till att logistiken kring arbetet med dessa fungerar. Andra delar i uppdraget är att tillsammans med mentorerna välja innehåll, planera och delta i träffen och vid vissa kurstillfällen, samt att efteråt uppmärksamma dessa aktiviteter på kommunens interna nyhets sida. Det senaste uppdraget i denna roll är att organisera och leda arbetet med de lärare som undervisar särskilt begåvade elever i F-åk 6. I rollen ingår också att se till att mentorerna och utvecklaren får möjlighet till egen kompetensutveckling i arbetet med högpresterande och särskilt begåvade elever samt ge kompetensutveckling till ämnesföreträdarna.

Verktyg

Med begreppet verktyg menar vi pedagogiska verktyg som ger stöd åt lärare att planera, genomföra och utvärdera sin undervisning. De verktyg som vi använder ska vara ett stöd för vidareutveckling av undervisningen i klassrummet. Exempel på verktyg som används av matematikteamet i arbetet med matematikintresserade och särskilt begåvade elever i Västerås stads grundskolor:

- ◇ EPA-modellen
- ◇ Smith & Steins modell för orkestrering av problemlösningslektioner
- ◇ boken *Rika matematiska problem*
- ◇ andra problem med generella lösningar
- ◇ en plan för genomförandet av träffar, kurser och kompetensutvecklingsprogram
- ◇ frågebatteri till elever och lärare för att utvärdera träffar och kurser
- ◇ litteratur, avhandlingar, forskningsartiklar, webbplatser, Skolverkets problembank och utmanade tävlingsuppgifter.

Ämnesföreträdarnas verktyg i detta arbete är bland annat:

- ◇ Boken *Barns matematiska förmågor – och hur de kan utvecklas*
- ◇ Skolverkets informationsbroschyrer kring särskilt begåvade elever
- ◇ SKL:s handlingsplan för särbegåvade elever.

Ett av verktygen för lärarna är de powerpointpresentationer med matematiska problem som används under träffarna med eleverna i åk 6–9. De ger lärar en liten problembank.

Normer

Begreppet normer definieras som lärares och elevers idéer, förväntningar och föreställningar kring hur undervisning ska se ut, hur vi tar för givet att vi arbetar och interagerar under lektionerna. Vi har arbetat med följande normer som

vi vill sätta i förhållande till arbetet med matematikintresserade och särskilt begåvade elever:

- ◇ matematikintresserade elever ska utmanas i matematikundervisningen
- ◇ en duktig matematiker är inte alltid den som är klar snabbast
- ◇ både lärare och elever ser felaktiga svar och ofullständiga resonemang som en möjlighet för lärande
- ◇ elever argumenterar för och förklarar sina lösningar för andra elever och klassen, under ledning av läraren
- ◇ elever lyssnar på varandra, ställer frågor och bygger vidare på klasskamraters resonemang, under ledning av läraren
- ◇ elever arbetar för att utveckla sina matematiska resonemang till eleganta lösningar.

Utmanade matematisk problemlösning

Problemlösningsträffarna inleds ofta med en kommunikationsövning och/eller en historisk introduktion till temat. Träffarna är sedan indelade i tre delar. Först två problemlösningsspass med avbrott för fika. Som avslutning ges två tävlingsproblem. Problemlösningsspassen pågår i cirka 60 minuter vardera och varje pass avslutas med att elevgrupper presenterar sina lösningar och att lösningarna jämförs. Ett urval görs för att visa bredd och djup i lösningsvariation. Eleverna får själva med hjälp av en dokumentkamera visa och berätta hur de har tänkt. De får feedback av ledarna och av varandra. Målet är att visa bredden i lösningsfamiljer: från enkla eller systematiska prövningar till avancerade generella algebraiska resonemang. Efter genomförd tävling snabbtätas lösningarna, vinnare dras, pris delas ut och lösningar visas och jämförs. Beroende på vilka årskurser som deltar kan det finnas två nivåer i tävlingen. Träffen avslutas med en utvärdering av dagen. Ibland följs även träffarna upp som en nyhet på stadens interna webbplats. Ett exempel på inbjudan till eleverna finns på Nämnares på nätet.

Träffen med eleverna – ett exempel

Eleverna hälsas välkomna och placeras slumpvis i grupper om fyra så det blir spridning i såväl ålder som skoltillhörighet. Om vi under förmiddagens gång ser att det finns elever som behöver ha större utmaningar erbjuds de att samlas i en egen grupp för att tillsammans lösa ännu mer utmanande problem.

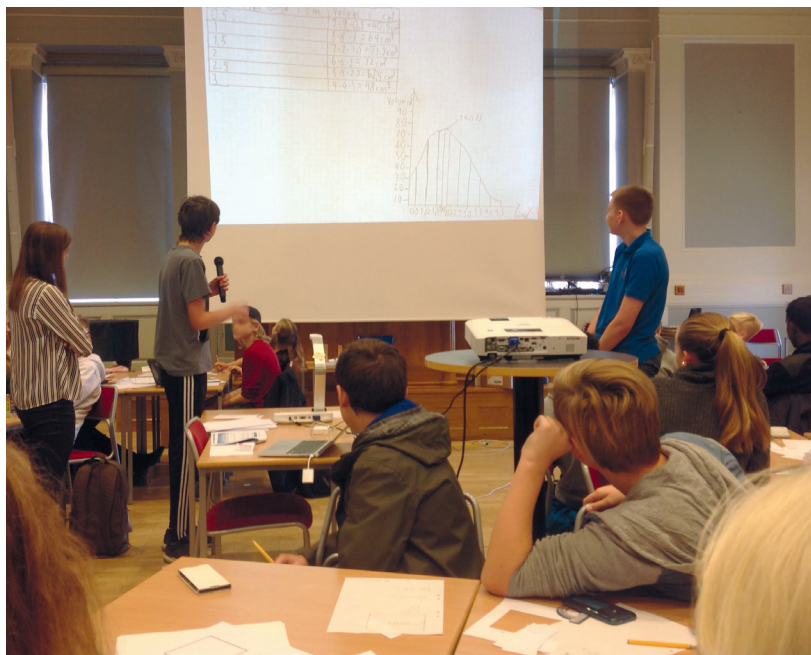
Temat är Pascals triangel

Träffen börjar med att vi kort följer upp problemet som eleverna har jobbat med innan de kom till träffen. Problemet är oftast valt från uppgifter i Högstadiets matematiktävling.

Denna gång handlar introduktionen om historiken kring Blaise Pascal. Elevernas första uppgift är att tänka ut hur talen i Pascals triangel bildas. De får en triangel där fem rader redan finns med. Vi följer upp deras svar och går vidare till att hitta mönster av tal i triangeln. Eleverna upptäcker triangeltalen och vi följer upp med hur mönster för triangeltalen kan se ut, i detta fall som prickar i en triangel, och uppmanar dem att uttrycka mönsterförändringen i

ord och finna en enkel formel för antalet prickar i respektive figur. Eleverna arbetar med att beskriva sambanden och de för matematiska resonemang i grupp. När eleverna kommit fram till olika lösningar lyfter vi det i en gemensam diskussion där grupperna berättar hur de har tänkt. Nästa steg är att hitta sambandet mellan figurens nummer (n) och antalet prickar (S). Detta följs upp med både ett aritmetiskt och algebraiskt resonemang tillsammans med eleverna som berättar hur de har tänkt. Påföljande uppgift blir den rekursiva formeln, där eleverna uppmanas att uttrycka hur mönstret växer med ord och med en algebraisk formel. Sedan blir uppgiften att hitta mönster av triangel-talens summor i Pascals triangel. När eleverna redovisat detta är det dags för förmiddagens fikastund där de bjuds på goda halvgrova mackor med ost, skinka och grönsaker. De önskade i en utvärdering att de skulle få kanelbullar, men så blir det inte. Till mackan får de Festis, så lite socker blir det ändå.

Efter fiket är det dags att ta itu med Pascals triangel igen. Eleverna får nu resonera kring summan på varje rad i triangeln och uttrycka mönstret de ser, med ord och algebraiskt. De elever som ännu inte träffat på potensräkning får en liten "räknestuga" kring begreppen för att komma vidare i problemen. När eleverna är klara med problemet visar några elevgrupper sina lösningar och berättar och resonerar hur de kommit fram till lösningen. Till sist får de uppgiften att läsa talen i Pascals triangel som decimala och ta reda på vad talet 11 har med detta att göra. Vi följer upp deras tankar och lösningar. Ett sätt att vidareutveckla problemet är att hitta tetraedertalen och se binomialutvecklingen. Slutligen är det dags för dagens matematiktävling. Vi har efter utvärderingar från eleverna valt att gå från att bara ha ett problem till att ha både ett utmanade problem och ett lite lättare problem för att alla ska kunna vara med. Den som vinner det utmanade problemet får två biobiljetter à 150 kr och sedan drar



Vid senaste träffen slog vi deltagarreord: 126 elever.

vi två vinnare bland dem som gjort det lättare problemet och de vinner varsin biobiljett å 150 kr. För att få vara med i dragningen måste det finnas ett matematiskt resonemang i lösningen som går att följa, enbart svar godkänns inte. De vinnande eleverna berättar sedan om sina lösningar. När en elev i åk 6 vinner den avslutande tävlingen är det särskilt roligt; uppmuntrande för eleven och imponerande inför hela gruppen! Det utmanade tävlingsproblemet lyder:

Två positiva heltal är sådana att deras differens, summa och produkt är i förhållandet 1:7:36. Vilka är de två talen?

Det lite lättare tävlingsproblemet:

Kolossal balans

För att få en gungbräda i jämvikt, ställ fem elefanter och en flodhästunge på ena sidan och en val på den andra. Om du är en lätt typ (vikt 50 kg) kan du klättra upp på en elefant och stå på den ena änden med tolv flodhästungar på den andra. Om du är en tung typ (vikt 200 kg) kan du stå på en av ändarna med elva flodhästungar och placera en elefant på den andra. Hur många ton väger valen?

Dagen avslutas med en utvärdering med fyra frågor:

- ◇ Vad var bra?
- ◇ Vad kan förbättras?
- ◇ Vad var det som var en utmaning för mig med dagens problem?
- ◇ Vad har jag lärt mig idag?

Efter träffen

När eleverna har gått hem återkopplar vi närvaron till lärarna och skickar med presentationen med de problem vi jobbat med. Lärarna får också ta del av elevutvärderingarna. Vi uppmanar lärarna på skolorna att ställa nyfikna frågor till eleverna och testa de problem vi jobbat med tillsammans med elever.

LITTERATUR

- Pettersson, E. & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor – och hur de kan utvecklas*. Studentlitteratur.
- Ryve, A., Hemmi, K. & Kornhall, P. (2016). *Skola på vetenskaplig grund*. Natur & Kultur Akademisk.
- Smith, M. & Stein, M. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik – för att planera och leda rika matematiska diskussioner*. Natur & Kultur Akademisk.