Stefan Buijsman

Vad är matematik?

Efter ett kortare uppehåll fortsätter nu artikelserien *Mattetalanger.* Denna gång förs ett filosofiskt resonemang om vad matematik är. Författaren tar både Platon och Sherlock Holmes till hjälp för att visa på olika sätt att besvara frågan.

Vad är matematik? Svaret kanske verkar enkelt. Vi vet alla att det är tal och trianglar, och det involverar en massa formler. Alla får lära sig matematik i skolan och ingen verkar blanda ihop det med exempelvis geografi. Men det kan också vara en mycket svår fråga. Därför är det som matematiken studerar, dessa tal och trianglar, mer mystiska än vad du kan tro.

Titta för en liten stund på geografi. Även här vet alla vad ämnet handlar om: berg, kontinentalplattor och så vidare. Det är sådant som vi alla kan se, ta på och göra experiment med. Kanske inte direkt med kontinentalplattor, men i det fallet blir effekten klart synlig när det gäller jordbävningar och vulkanutbrott. Förändringar kan mätas och vi lär oss mer om jorden genom dessa mätningar. I dessa generella termer är geografi ganska enkelt att förstå. Matematik är annorlunda, eftersom vi inte kan se, röra eller göra experiment med tal. Du kan stöta på en vulkan, men du kan inte ramla över talet fyra. Du kan naturligtvis skriva '4', men det är inte det riktiga talet – precis som ordet 'sol' inte är den riktiga solen. Platon illustrerade denna udda karaktär av tal med en berättelse.

Tänk dig en grupp människor som är födda i en grotta och som inte är tillåtna att lämna den. De är dessutom fastkedjade mot en vägg hela sitt liv och kan bara titta in mot slutet av grottan. De kommer aldrig att få se solen och aldrig förstå att det finns något annat ljus än det halvmörker de är födda i. Det enda de kan se är skuggor som kastas in till änden av grottan av personer som ställer saker bakom dem. För dessa fångar i Platons berättelse, är skuggorna det enda riktiga. De kommer aldrig att lära sig någonting om de faktiska vaserna, djuren eller annat som placeras eller rör sig bakom deras rygg.

Vad är poängen med en sådan grym berättelse? Platons idé är att det som vi ser runt omkring oss är som de skuggor fångarna ser. Det är det enda vi kan se, men det är inte det som är betydelsefullt enligt Platon. Det är de saker och varelser som kastar skuggorna som är det viktigaste. Platons poäng är att vi inte kan se sakerna som orsakar skuggorna, inte för att vi är fastkedjade mot en vägg, utan för att de är så abstrakta.

Platon tänker i mycket generella termer, som vad det är som alla bord har gemensamt. Du kan inte se det generella bordet, för du kan bara titta på enskilda bord. Men, vi vet en del om bord i allmänhet, exempelvis att de har ben. Det är på samma sätt med tal. Vi kan inte se dessa generella, abstrakta, tal. Vad vi kan se är att det finns tre bord i ett rum eller att fem personer väntar på bussen. Om vi tror på Platons berättelse så ska vi inte bry oss så mycket om att räkna saker som finns omkring oss, utan istället titta på de abstrakta talen bakom dem, även om det är mycket svårare att lära sig någonting om tal på detta generella sätt.

Så, vad är matematik?

Platon och de som håller med honom – vi kallar dem platonister eftersom det var han som först formulerade de här idéerna – säger att matematiken undersöker dessa mycket abstrakta saker som kallas för tal, trianglar och så vidare. Dessa tal existerar verkligen, precis som skuggorna som syns på väggen. Vi kan inte se talen, men enligt Platon är det mer en besvärlighet än ett allvarligt problem.

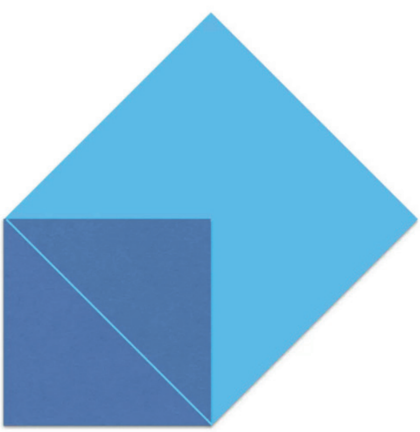
Är det så? Det är klart att det låter ganska bra att säga att tal existerar i den abstrakta världen som vi inte kan se. Matematiker, och alla vi andra, är upptäckare i den här andra verkliga världen. Eftersom du vet att $1+1=2$, så vet du också någonting om den mystiska värld som Platon säger finns där. Men hur upptäcker du en sådan värld? När det gäller geografi vet vi hur vi ska utforska den värld som studeras. Du börjar helt enkelt vandra omkring och tittar på de strukturer du ser i landskapet. Nuförtiden måste du göra litet mer för att kunna säga något nytt, men geografi är i princip fortfarande detsamma. Platons problem är att detta aldrig har fungerat i matematiken. Han hade en annan lösning, men en mycket märklig sådan.

Dold kunskap om matematik

Platon hävdade att du faktiskt aldrig lär dig något nytt om tal. Hur skulle du kunna det när talen är i en egen värld som vi inte kan besöka? Nej, du kommer bara ihåg saker om tal. Konstigt nog är hans teori att innan du ens är född så kan du, eller något som liknar din själ, allt som du behöver veta om matematik. Men du glömde bort allt när du föddes. Den här kunskapen om matematik är dold någonstans och du kan komma ihåg den om du försöker tillräckligt mycket.

Han försökte till och med att bevisa detta, med viss svårighet. I en av sina böcker presenterar han en dialog mellan Sokrates och en ung pojke. Pojken frågade hur man kan göra en kvadrat två gånger så stor som en annan bestämd kvadrat. Det är ett ganska svårt problem för du kan inte göra båda sidorna av kvadraten två gånger längre. Om du gör det kommer du att få en kvadrat som är fyra gånger så stor. Å andra sidan, om du endast gör en sida två gånger så lång så har du inte längre någon kvadrat.

I dialogen ställer Sokrates en rad frågor som sammantaget leder pojken till rätt svar. Lösningen är följande: först gör du en kvadrat som är fyra gånger större än den första, genom att göra båda sidorna två gånger längre. Tänk dig sedan att du lägger till tre kvadrater med samma storlek som den som du redan har och sedan klipper du alla kvadraterna i två delar. Det är ganska enkelt, för varje kvadrat har en diagonal som visar exakt var du ska klippa. Tillsammans bildar dessa fyra halvor en ny kvadrat. Den nya kvadraten är två gånger större än den första kvadraten. Du kan se detta i illustrationen där den första kvadraten är den mörkare blå och den nya större kvadraten är den som är ljusblå.



En bra lösning, men Platons argument håller inte riktigt. Pojken lyckades klura ut hur han skulle göra en kvadrat men kommer inte riktigt ihåg hur. Sokrates försöker föreslå det riktiga svaret och pojken säger hela tiden 'ja' efter att ha tänkt en stund. Om det inte handlar om minne som Platon säger, hur hjälper en stunds tänkande pojken att utforska världen av abstrakt matematik?

Det vet vi inte. Tyvärr är det ett väldigt vanligt svar inom filosofin. Men det är många filosofer som tror sig veta att det finns ett svar. Det är bara det att de inte är överens om vilket svar som är rätt. Men mer viktigt är att det finns lika många människor som inte tror att det går att lösa Platons problem. Det beror på att de här människorna inte tycker att tal är lika de saker som kastar skuggor på grottväggen. De tycker att tal är mycket mer lika Sherlock Holmes.

Nominalister har en annan syn på matematik

Sherlock Holmes var som de flesta vet en detektiv som levde i London. Han jobbade tillsammans med Watson och de löste ofta fall där Holmes ärkefiende Moriarty var inblandad. På ett sätt är allt detta sant. Förutom att Sherlock Holmes aldrig har existerat. Han var påhittad av Sir Arthur Conan Doyle. Filosofer som tror att tal är som Sherlock Holmes fokuserar på den sista biten. De tror att precis som den kände detektiven är tal (och all övrig matematik) påhittade. Personer som tycker så kallar sig själva nominalister.

Nominalister förnekar att det finns en värld full av tal som vi undersöker när vi lär oss aritmetik i skolan. Vad du verkligen lär dig är en påhittad historia med tal som huvudpersoner. Precis som historien om Sherlock Holmes är den påhittad av människor för länge sedan. Och precis som historien om Sherlock Holmes så är den inte riktigt sann. Nästa gång du ser ett matematiskt problem kan du lika gärna direkt säga att svaret är fel eftersom matematik bara är en saga om sådant som inte finns. Men det vore lite orättvist mot matematiken. Det är skillnad mellan $1+1=2$ och $1+1=3$ även om talen är påhittade. För att återvända till Sherlock Holmes ännu en gång så är det en viss skillnad mellan ”Holmes bodde i London” och ”Holmes bodde i Tokyo”. Båda påståenden är uppriktigt sagt falska. Men den första meningen är en del av historien – det är den personen som Conan Doyle tänkte sig – den andra är det inte.

Även om du tror att matematiken är påhittad kan du ändå finna de rätta svaren på matematiska problem, helt enkelt därför att ett svar är 'rätt' om det är en del av historien som du har fått berättad för dig och 'fel' om den inte är det. Det betyder att matematik är mycket mer olikt geografi än vad du kanske trodde: geografi är inte påhittat och det som sägs om kontinentalplattor är (oftast) helt sant. Matematiken är ensam bland vetenskaperna eftersom den är en produkt av vår fantasi.

Är då matematik bara en historia?

Åter igen, kanske inte. Även om Platon hade ett stort problem som fortfarande inte är löst, har nominalisterna också ett stort problem som behöver lösas. För dem är det inte lika svårt att förklara hur du lär dig något om matematik. De kan helt enkelt peka på andra historier och säga att vi lär oss matematik på samma sätt. Men, på ett avgörande sätt är inte matematik som de andra historierna. Vi tror egentligen inte på historier om Sherlock Holmes, men nästan alla tror på historier om tal. Troligtvis tänker du inte att $1+1=2$ är en del av en historia, utan att det faktiskt är sant med tanke på världen omkring oss.

Har alla dessa människor fel? Det verkar ganska otroligt, nominalisterna borde lista ut hur idén ska passa för människor som inte tror att matematik bara är en historia eftersom det är det enligt nominalisterna. Kan de klara av det? Igen, det vet vi inte. Det finns många försök att göra detta, men filosoferna måste komma överens om att en av idéerna är den rätta vägen att förstå matematik och fortfarande är det ungefär hälften av filosoferna som istället tror på platonism. I den bemärkelsen vet vi fortfarande inte vad matematik är.

Många frågor om matematik

Filosoferna har många fler frågor om matematik. Det är inte bara oklart vad matematik är utan också ganska mystiskt hur vi studerar matematik. Vi använder bevis och matematikernas jobb är att producera dessa bevis, men alla bevis är inte lika bra. På ett sätt är de det bara för att de alla visar att slutsatsen är sann. Men på ett annat sätt är de inte det eftersom vissa bevis är mer hjälpsamma än andra. Ibland kan ett bevis få dig att förstå varför något är sant men ibland fallerar det. Ett bra exempel är beviset om siffrorna på en räknare. Om du tittar på en räknare som den nedan så kan du skapa tal med hjälp av de nio siffrorna på följande sätt: Börja med en siffra på någon av kanterna t ex 4. I det här fallet följer du en horisontell linje: 4, 5, 6 och sen tillbaka 6, 5 och 4. Talet är då 456 654. Gör samma sak för alla vertikala linjer och diagonalen och du får tal som: 753 357, 123 321 och 258 852.

Resultatet är lite underligt eftersom alla talen är delbara med 37. Hur bevisar vi det? Ett förslag är att du skriver ner alla dessa tal och delar vart och ett med 37. Du kan bevisa teorin men du kommer faktiskt inte förstå varför alla tal är delbara med samma tal.

En annan möjlighet är att titta lite bakom hur dessa tal formas. Du startar alltid med ett tal på räknaren och tricket är sedan att du adderar eller subtraherar med ett och samma tal för att få nästa tal, dvs om a är den siffra som du startar med och d är det tal som är differensen till nästa siffra, är $d = 1$ i talet 123 321. I talet 963 369 är $a = 9$ och $d = 3$. Generellt ser alla tal ut så här:

$$10^5 a + 10^4(a + d) + 10^3(a + 2d) + 10^2(a + 2d) + 10(a + d) + a$$

För att kunna bevisa något om dessa tal måste du förenkla uttrycket, vilket är lika med $111\,111a + 12\,210d$. Till sist så är det samma som $1\,221(91a + 10d)$. På grund av formeln är alla dessa tal delbara med 1 221, samt 3, 11 och 37 (eftersom $3 \cdot 11 \cdot 37 = 1\,221$).

Skillnaden mellan bevisen är kanske inte så kittlande men jag hoppas att det är klart att det andra beviset är mer förklarande än det råstarka beviset. Den filosofiska frågan är, vad är det som gör dessa förklarande bevis till så bra bevis? Är det så att ovanstående bevis som förklaras på ett mer generellt sätt är lättare att förstå än det som är lite krångligare?

Inte alltid. Om du tittar på ett annat bevis, nämligen där summan av de första n ojämna talen är lika med n^2 (t ex $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$), då ser du att generalisering inte är den enda förklaringen. En av de mest generella vägarna att bevisa en sådan teori är genom induktion: du börjar med den första summan som är just 1 och visar sen att det alltid är sant även för nästa. För att illustrera detta så kan det se ut som följer:

$$1=1^2$$

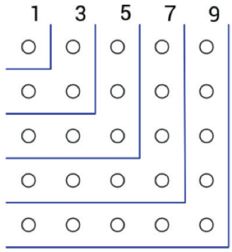
och om

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$$

då är:

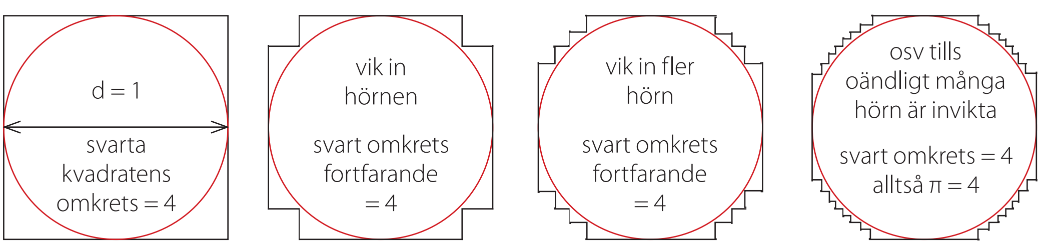
$$1+3+5+\ldots+2n-1+2(n+1)-1=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Nu vet vi att oavsett hur många ojämna tal vi adderar så kommer summan alltid att bli kvadraten av de tal som adderats. För mig förklarar det inte mycket, oavsett hur generell metoden än är. Jämför det med bilden nedan där du kan se ett visuellt bevis för teorin.



Det kan ta en stund innan du ser beviset i denna bild. Den översta vänstra cirkeln visar alltid $1=1^2$. Om du går ner ett steg och till höger så kan du se $1+3$. Där formas en kvadrat med 2^2 cirklar. Gå ner ett steg till så kan du se $1+3+5=3^2$. Eftersom du alltid kan göra kvadrater så här oavsett hur många ojämna tal du adderar visar teorin att det är sant.

Så varför är de visuella bevisen mer förklarande än induktionsbevisen? De är inte mer generella. Denna visuella metod kan endast användas för denna teori. Induktion är något du kan använda för alla teorier som behandlar alla jämna och hela tal. Just detta bevis använder en bild men samtidigt kan en bild missleda dig. Tänk bara på alla bilder som försöker visa att $\pi=4$, som den nedan.



Det är fortfarande en öppen fråga vad de goda bevisen har som inte de dåliga har. Ett förslag är att det är en blandning av saker. Talen från miniräknaren är ett bättre bevis eftersom det visar vad de olika problemen har gemensamt medan de visuella ojämna talen direkt får din uppmärksamhet på att det är en viktig faktor för resultatet (summan är en kvadrat). Ju bättre ett bevis är att visa detta desto mer förklarande finner vi beviset.

Det som artikeln tagit upp är toppen av ett isberg av frågor hur matematiken fungerar. Några fler som kan nämnas:

- *Hur är det möjligt att förena matematik med vetenskap?*
  Tal och resten av matematiken är (oavsett om du är platonist eller nominalist) abstrakt och har ganska lite att göra med världen runt oss, vare sig talen finns i ett eget land eller vad vi gjort dem till. Varför kan vi då använda dem till att beskriva så många av de verkliga saker som finns runt omkring oss? Varför är just matematiken så användbar för detta?
- *Varför är matematiken så framgångsrik inom vetenskap?*
  Fysiker har använt matematik i hundratals år och många upptäckter har gjorts genom användning av matematik. Newtons modell för gravitet var uteslutande baserad på enkel matematik och var mer än tusen gånger mer användbar än vad Newton själv kunde veta. Positroner upptäcktes för att en utvald matematisk modell i sin elegans visade en fysiker att den existerade.
- *Hur fungerar bevis?*
  Ofta bevisar vi med en bild hur matematiken fungerar och delvis med förklaringar om resonemanget bakom formlerna. Strängt talat finns det ingen plats för sådant inom matematiken. Den använder endast formler och väldigt strikta steg för att ta sig från en formel till en annan. Så hur kan våra informella bevis som använder alla dessa ickematematiska element och hoppar över flera steg av kalkyleringar användas som ett verktyg för att lära något om matematik som är mycket mer strikt? Hur fungerar det visuella beviset av summan av ojämna tal som ett bevis för teorin?
- *Hur kan vi förstå oändlighet?*
  Våra hjärnor är ändliga och vi kan endast tänka på ett bestämt antal saker på samma gång. Även om du tillbringar hela ditt liv med att försöka gå igenom så många saker som möjligt så kommer du ändå att bara ha ett antal tankar kvar. Så hur kan vi då förstå oändlighet? Hur kan vi ha teorier om oändlighet på ett sofistikerat sätt så som först gjordes av Cantor?

Hur klar matematiken än verkar för dig när du förstår en liten del av den, kommer du när du tittar i detalj på dina färdigheter att förstå mindre och mindre av vad du har lyckats med. En hel del av dessa detaljer är oklara men en sak är klar: vi *kan* klara av matematiken och den är väldigt användbar. På grund av framgången är det precis därför filosoferna vill försöka förstå vad som händer. Mer och mer börjar det klarna men filosofi vore inte filosofi om det inte fanns olika teorier för nästan allt. Som ett resultat av det förda resonemanget så är det upp till dig som läser detta att bestämma vilken förklaring du gillar bäst.

Översatt från engelska till svenska av Rose-Marie Wikström.