

Möjligheternas Dag 2022

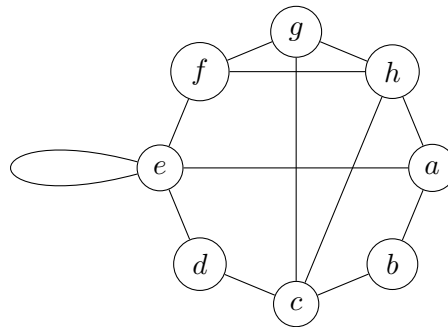
Hanne Månsson & Stefan Wagner

Institutionen för matematik och naturvetenskap
Blekinge Tekniska Högskola, Karlskrona

Broarna i Königsberg

Definition (Grad). Ett hörns grad är antalet kanter som går ut från hörnet.

Övning 1. Ange gradtalen hos hörn i grafen G i Figur 1 nedan.



Figur 1: Grafen G .

Övning 2. Bevisa att summan av gradtalen i en graf är alltid jämn.

Övning 3. Anta att grafen G har 6 hörn med grader 1, 2, 2, 3, 3, 5. Hur många kanter har G ?

Övning 4. Förklara varför Övning 3 ovan implicerar det så kallade *handskakningslemmat* som säger att det under ett cocktailpartys lopp hela tiden är ett jämnt antal gäster som har skakat hand ett udda antal gånger.

Tips: Låt gästerna vara hörn och dra en kant mellan två personer som har skakat hand.

Övning 5. Modellera broarna i Königsberg med en multigraf och förklara varför problemet är ekivalent med att hitta en Eulerkrets i denna graf.

Övning 6. Anta att vi vandrar längs en krets i en graf. Förklara varför vi i varje hörn måste gå in lika många gånger som vi går ut.

Övning 7. Förklara varför förgående övning innebär att varje hörn måste ha jämn grad för att det ska kunna finnas en Eulerkrets.

Övning 8. Tänk igenom de tre föregående övningarna igen och skriv ett komplett och lättförståeligt bevis för att det är omöjligt att vandra längs broarna i Königsberg så att man börjar och slutar på samma ställe och har gått över varje bro exakt en gång.

Övning 9. Om man får börja och sluta på olika ställen (till exempel om man ska äta söndagsmiddag hemma hos svärmor), går det då att uppfylla kravet på att gå längs alla broar exakt en gång? Förklara varför detta innebär att finna en Eulerväg i multigrafen.

Euler utförde resonemanget i övningarna ovan och fann också att kraven på grader inte bara nödvändiga utan också tillräckliga (om bara alla kanter överhuvudtaget hänger ihop):

Sats (Eulerska grafer).

1. *En graf har en Eulerkrets om och endast om grafen är sammanhängande och alla hörn har jämn grad.*
2. *En graf har en Eulerväg om och endast om grafen är sammanhängande och högst två hörn har udda grad.*

Övning 10. Lösa Övning 9 på andra övningsbladet.