Centrar för en triangel

Johan Richter

Vi ska lära oss lite om trianglar idag. Ni har säkert stött på trianglar en hel del i er tidigare utbildning men jag tror det kommer vara en del nya saker för er idag, även om ni läser nian.

Ett begrepp vi kommer använda är *kongruens*. Två trianglar är kongruenta om de är identiska, bara att de befinner sig på olika ställen.

Det finns några sätt att verifiera att två trianglar är kongruenta. Dessa kommer ni få lära er i skolan om ni inte redan lärt er det, så jag bevisar dem inte här. En sådan regel är att två trianglar har samma sidlängder, då måste de vara kongruenta. Det kallas ofta fallet sida-sida-sida.

Ett annat fall är om två sidor, och vinkeln mellan, är lika. Det kallas ofta sida-vinkel-sida.

Exempel. I triangeln ABC är $|AB| = 10$, $|BC| = 12$ och $\angle BAC = 34^{\text{deg}}$. I triangeln DEF är $|DE| = 10$, $|DF| = 12$ och $\angle EDF = 34^{\text{deg}}$. Alltså är det två trianglarna kongruenta, t ex $|EF| = |BC|$.

Vi kommer också behöva begreppet *likformighet*. Två trianglar är likformiga om de är lika förutom att skalan är olika. Om vinklarna är lika så är trianglarna likformiga. Ett annat sätt att visa likformighet är att kolla att $AB : A'B' = AC : A'C'$ och vinkeln vid A är lika med vinkeln vid A'. Notera att man måste tala om vilka sidor och vinklar som hör ihop om det är oklart.

Exempel. I trianglarna ABC och DEF gäller det att $\angle A = \angle D = 31°$, $|AB| = |DE| = 4$ och $|AC| = |DF| = 6$. Visa trianglarna är kongruenta.

Exempel. Triangeln ABC är likformig har sidan $|AB| = 10$, $|AC| = 11$ och $|BC| = 12$. I triangeln DEF är vinkeln vid D lika med vinkeln vid A, och $|DE| = 20$, $|DF| = 22$. Vad är längden av sidan EF?

Circumcentrum

Ta och rita upp lite trianglar. Se till att de ser ut på olika vis. Rita ganska stort, så att det blir lättare att rita till extra saker i triangeln och så att ni kan se vad som händer.

Ta och hitta mittpunkt på varje triangelsida. Sedan ritar ni en linje (ett streck i mer vardagligt språk) vinkelrät ut från varje mittpunkt. Dessa linjer kallas *mittpunktsnormaler* för triangeln. Gör det för alla trianglarna.

Efter ni gjort det, så undrar jag om ni ser något mönster?

Sats. *I en triangel så skär alla 3 mittpunktsnormaler varandra i en punkt.*

Bevis. Låt de tre hörnen i en triangel vara A,B och C. Dra mittpunktsnormalerna från sidan AB och sidan BC. Dessa måste skära varandra i en punkt, som vi kallar O . Låt C' vara mittpunkten på sidan AB. Notera att triangeln $AC'O$ är kongruent med triangeln $BC'O$. Alltså är sidan AO lika lång som sidan BO. Ett liknande resonemang visar att sidan BO är lika lång som sidan CO. Alltså är även sidan AO lika lång som sidan CO.

Låt B' vara mittpunkten på sidan AC. Rita ut $B'O$. Triangeln $AB'O$ är kongruent med $CB'O$ enligt fallet SSS. Alltså måste vinkeln $\angle AB'O$ vara lika stor som $\angle CB'O$, vilket betyder de är 90 grader.

Vad vi visat är att $B'O$ är mittpunktsnormalen på AC och alla tre mittpunktsnormalerna går alltså genom punkten O.

□

Punkten där mittpunktsnormalerna skär varandra kallas *circumcentrum*.

Sats. *Circumcentrum för en triangel är mittpunkten för en cirkel som går igenom triangelns 3 hörn.*

Bevis. Det följer från resonemanget i förra beviset. Cirkeln med centrum i O och radien AO kommer också gå igenom punkterna B och C. □

Ortocentrum

Rita återigen upp några trianglar. Från varje hörn i varje triangel så ska ni rita ut höjden till motstående sida. Det är den kortaste linjestycket till den förlängda sidan.

Om ni ritar ordentligt, vilket inte är helt lätt kanske, så ska ni märka att de 3 höjderna verkar skära varandra i en punkt.

Sats. *De tre höjderna till en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. Låt triangeln ha hörnen A, B, C. Anta vinkeln vid A är α, vid B är β och vid C är γ. Skapa en triangel $\tilde{C}AB$ med AB som bas sådan att $\angle\tilde{C}AB = \beta$ och $\angle\tilde{C}BA = \alpha$, och de två vinklarnas inre ligger utanför triangeln. Likaså skapa en triangel $A\tilde{B}C$ där $\angle CA\tilde{B} = \gamma$ och $\angle AC\tilde{B} = \alpha$. Slutligen skapa en triangel $\tilde{A}BC$ där $\angle\tilde{A}BC = \gamma$ och $\angle\tilde{A}CB = \beta$.

Notera att alla tre nya trianglar är kongruenta med ABC. (De har samma vinklar och en sida som är lika.) Notera också att A kommer ligga på sträckan $\tilde{C}\tilde{B}$. Det följer av att vinkel $\angle\tilde{C}A\tilde{B}$ är $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Likaså ligger B på sträckan $\tilde{C}\tilde{A}$ och C på $\tilde{A}\tilde{B}$.

Vi ser att A, B och C i själva verket är mittpunkter på sidorna i triangeln $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Vidare är $\tilde{B}\tilde{C}$ parallell med sidan BC, osv.

Dra mittpunktsnormalen för sidan $\tilde{B}\tilde{C}$. Den måste gå igenom A för det är mittpunkten. Någonstans skär den linjen genom B och C. Eftersom normalen är vinkelrät mot $\tilde{B}\tilde{C}$ och BC är parallell med BC så är mittpunktsnormalen också vinkelrät mot BC. Det betyder att en mittpunktsnormal i $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ är en höjd i ABC. Eftersom mittpunktsnormalerna i $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ skär varandra i en punkt så skär höjderna i ABC varandra i en punkt. □

Punkterna där de tre höjderna skär varandra kallas *ortocentrum*.

Centroid

Rita upp några trianglar igen. Rita ni sträckor från varje hörn till mittpunkten på motstående sida. Dessa sträckor kallas *medianer*. Ni kanske kan gissa vad som kommer hända: för varje triangel kommer de 3 medianerna skära varandra i en punkt.

För att visa det visar vi först en annan sats.

Sats. *Låt ABC vara en triangel. Låt A' vara mittpunkten på sidan BC och B' vara mittpunkten på sidan AC. Medianerna AA' och BB' skär varandra i en punkt, G. Det gäller att $AG : GA' = 2 : 1$ och också att $BG : GB' = 2 : 1$.*

Kan vi göra det stegvis tillsammans?

Medianerna AA' och BB' skär definitivt varandra i en punkt, som vi kallar G.

Visa sedan att triangeln $CB'A'$ är likformig med CBA. Vad är längdskalan?

Nästa sak jag påstår är att $\angle A'B'G = \angle ABB'$. Visa det.

Det visar att triangeln ABG är likformig med triangeln $A'B'G$. Eftersom sträckan $A'B'$ är hälften så lång som sträckan AB så är GA' hälften så lång som AG och GB' hälten så lång som BG.

Bevis. Medianerna AA' och BB' skär definitivt varandra i en punkt, som vi kallar G.

Triangeln $CB'A'$ är likformig med CBA eftersom vinkeln vid C är samma och $CB' : CA = CA' : CB = 1/2$. Alltså är sträckan $A'B'$ hälften så lång som sträckan AB och $\angle A'B'C = \angle BAC$ och $\angle B'A'C = \angle ABC$.

Nästa sak jag påstår är att $\angle A'B'G = \angle ABB'$. Om ni inte stött på satsen som visar att det är sant kan man inse att $\angle A'B'G = 180° - \angle A'B'C - \angle AB'B$ och $\angle ABB' = 180° - \angle BAC - \angle AB'B$. Eftersom $\angle A'B'C = \angle BAC$ så är $\angle A'B'G = \angle ABB' = \angle ABG$. Likaså är $\angle BAG = \angle B'A'G$.

Det visar att triangeln ABG är likformig med triangeln $A'B'G$. Eftersom sträckan $A'B'$ är hälften så lång som sträckan AB så är GA' hälften så lång som AG och GB' hälten så lång som BG. □

Sats. *Alla 3 medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. Låt ABC vara en triangel. Låt A' vara medelpunkten på sidan BC, osv. Vi vet att AA' och BB' skär varandra i en punkt som vi kan kalla G, som ligger två tredjedelar längs vägen från A till A'. Det är bara vad föregående sats säger. Men vi kan lika gärna tillämpa satsen på medianerna AA' och CC'. De måste skära varandra i punkten som också ligger två tredjedelar längs vägen från A till A'. Alltså är det samma punkt, G, och i G skär alla 3 medianerna varandra. □

Punkten där medianerna skär varandra kallas *centroiden*. Centroiden är lika med tyngdpunkten av triangeln (med vilket jag menar hela området innanför triangelns sidor). Hur vi definierar tyngdpunkten matematiskt tänkte jag inte gå in på, men ni har kanske en intuitiv fysikalisk bild vad det innebär?

Eulerlinjen

Ta nu och rita lite nya trianglar. Ta och rita ut alla tre centrarna vi har pratat om. Vi kommer inte vara intresserad av själva linjestyckena nu så de kanske ni kan sudda efter ni hittat skärningspunkterna. Om ni gör detta för några olika trianglar, kan ni se något mönster?

Sats. *För varje triangel finns det en linje som innehåller circumcentrum, ortocentrum och centroiden för triangeln.*

Bevis. Anta vi har en triangel ABC. Låt A' vara mittpunkten på sidan BC. Låt O vara circumcentrum och G centroiden för ABC. Om $O = G$ så kan vi definitivt hitta en linje som också går igenom H, så anta att $O \neq G$. Låt H vara punkten sådan att $|HG| = 2|GO|$ och $|HO| = 3|GO|$.

Trianglarna AGH och $A'GO$ har en vinkel som är lika stor (den vid G) och $|HG| : |GO| = |AG| : |GA'| = 2$. (Vi har använt en egenskap vi visade förut.) Alltså är trianglarna likformiga. Det medför i sin tur att vinkeln som AH och $A'O$ bildar mot linjen HO är samma. Alltså är AH parallell med $A'O$. Eftersom $A'O$ är vinkelrät mot sidan CB är AH det också, så AH är höjden från A till sidan BC.

Exakt samma resonemang kan nu göras för B och C, och vi kommer fram till att deras höjder också skär i H.

□

Notera att beviset faktiskt visar att avståndet från circumcentrum till centroiden är hälften av avståndet från ortocentrum till centroiden.

Linjen genom de 3 punkterna kallas för triangelns Eulerlinje. Namnet Euler kommer ni stöta på igen om ni läser matematik på gymnasie och högskolenivå, han gjorde mycket. Just Eulerlinjen känner dock inte så många till.

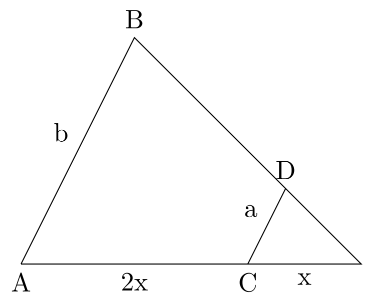
Exempel. I en likbent (men inte liksidig) triangel är Eulerlinjen lika med mittpunktsnormalen för den avvikande sidan.

Geometriuppgifter

1. En triangel har hörn i punkterna med koordinater $(0,0), (2,0)$ och $(1,3)$. Vad är koordinaterna för triangelns centroid?

2. Triangeln ABC är likformig med triangeln DEF. Vi vet att $|AB| = 3$, $|AC| = 4$ och $|BC| = 2$. I DEF gäller det att $|DE| = 10$ och $|DF| = 7.5$. Vad är $|EF|$?

3. Betrakta triangeln nedan.



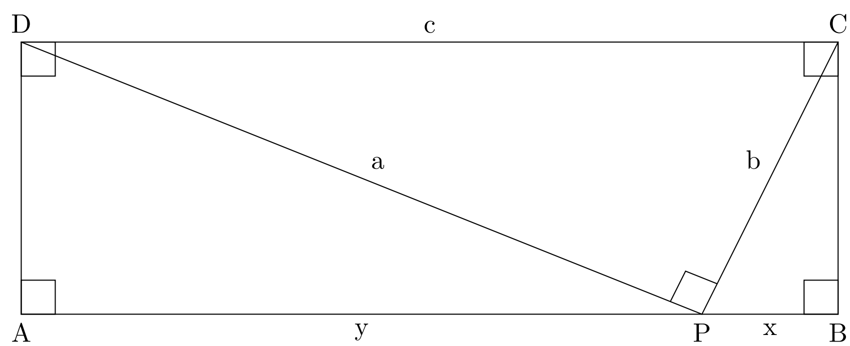
Sträckorna AB och CD är parallella. Vilket påstående är sant?

(i) b är dubbelt så lång som a.

(ii) a är en tredjedel så lång som b.

(iii) Det finns inget enkelt samband mellan a och b.

4.



a) Motivera varför $\triangle APD \sim \triangle CPD \sim \triangle PBC$.

b) Låt $AP = y$. Skriv ett uttryck för y som bara innehålller a och c.

c) Låt $BP = x$. Skriv ett uttryck för x som bara innehåller b och c.

d) Använd uttrycken i b) och c) för att bevisa Pythagoras sats.

5. Skapa några trianglar och prova rita ut bisektriser till de tre vinklarna. Märk ett mönster. Kan ni bevisa det?

6. Visa att en median delar en triangel i två deltrianglar med samma area.
7. Jag påstod att centroiden var tyngdpunkten. Kan ni prova det fysiskt?
8. Kan ni ge ett teoretiskt argument för varför centroiden är tyndpunkten?
9. Visa att om P, Q, R är tre punkter, som inte alla ligger på en linje, så finns det exakt en cirkel som går igenom P, Q och R.
10. Rita upp några trianglar. Rita ut centroiden, circumcentrum och ortocentrum. Se ett mönster. Fråga Johan efter bevis om du är intresserad.
11. Rita upp lite trianglar. Rita ut cirkeln som går igenom de tre mittpunkterna. Rita också ut höjderna, och kanske linjen från förra uppgiften. Kan ni se ett mönster?

Tips

1. Dra medianen från $(1, 3)$.
2. $|DE|/|DF| = 20/15 = 4/3$.
3.
4.
5. Mönstret vi tänkte på är att bisektriserna skär varandra i en punkt. För att bevisa det är det bra att känna till följande sats: Om punkten P ligger på bisektrisen till $\angle BAC$ så är avståndet från P till AB lika stort som avståndet från P till AC. Som kuriosa kan nämnas att punkten där bisektriserna skär varandra oftast inte ligger på Eulerlinjen.
6. Längen av basen i båda deltrianglarna är lika. Höjden är också lika. (Varför?)
7. Klipp ut en triangel i kartong.
8. Titta på varje median för sig och argumentera för att tyngdpunkten måste ligga på den. Den enda punkten som ligger på alla 3 medianer är centroiden.
9. Låt de tre punkterna vara hörnen i en triangel. I avsnittet om circumcentrum visade vi att en cirkel gick igenom alla 3. Hur visar ni att det bara finns en cirkel med den egenskapen?
10. Rita ut höjderna till triangeln. Ni kan också rita ut Eulerlinjen och cirkelns centrum.