

Möjligheternas dag

Positionering med hjälp av samverkande radarsystem

Kombinationer och sannolikhet

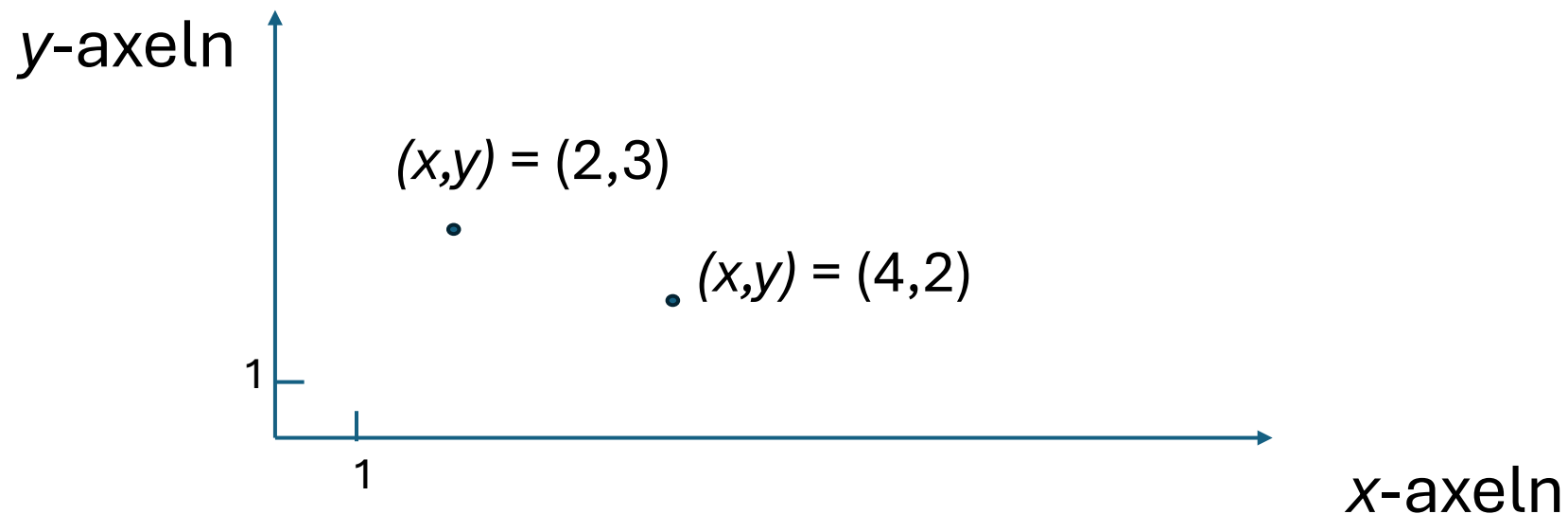
Introduktion till radar

- En radar skickar ut en elektromagnetisk puls och lyssnar på ekot. Genom att mäta tiden det tar innan pulsen kommer tillbaka kan man bestämma avståndet till ett ”radarmål”. Samma princip används bland annat av:
 - Ekolod, man bestämmer vattendjup genom att skicka en akustisk signal i vattnet
 - Fladdermöss använder också ekolod, fast i luften
- De flesta moderna radarsystem koncentrerar signalen till en viss riktning. Då kan man bestämma avstånd och vinkel, vilket ger exakt position hos målet.
- Vi ska istället studera två samverkande radarsystem, som vardera bara kan mäta avstånd. Kan vi då bestämma positionen?

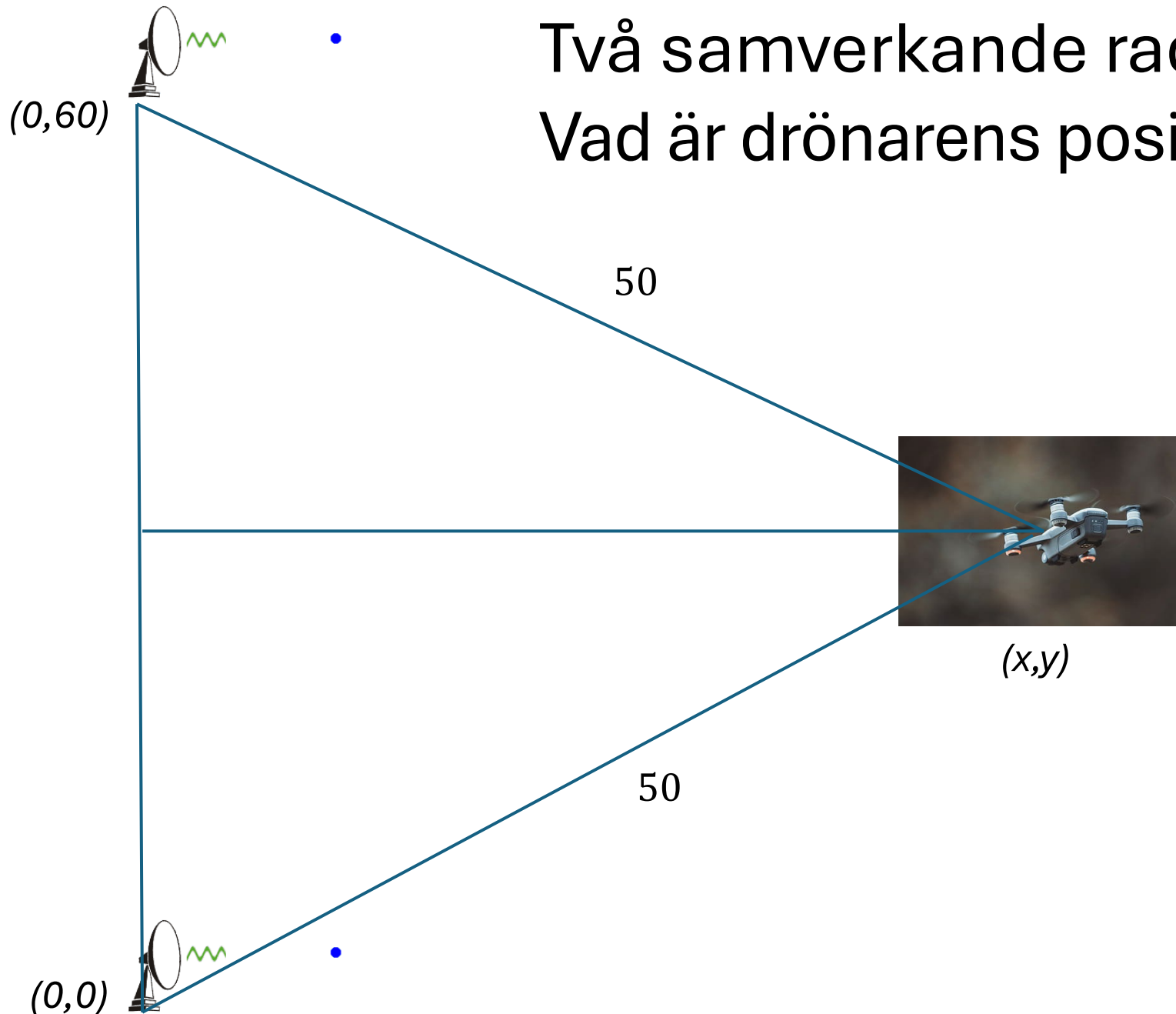


Koordinatsystem

- Vi studerar en tvådimensionell yta, t.ex. ett papper eller en fotbollsplan
- En punkt på ytan kan anges med hjälp av två koordinater: x och y
- x är den horisontella koordinaten och y den vertikala

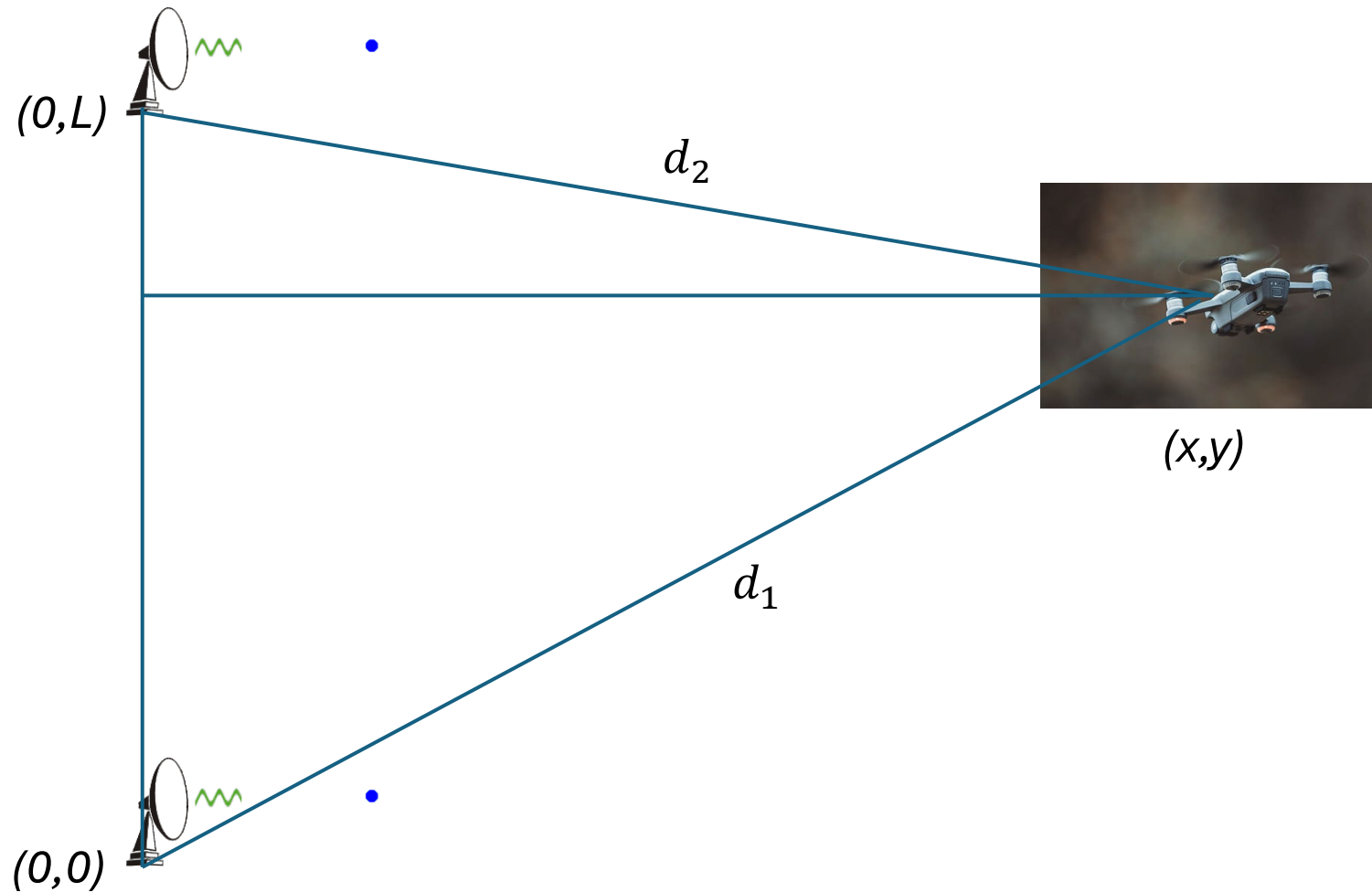


Två samverkande radarsystem. Vad är drönarens position?



- Radar 1 befinner sig i origo: $(x,y)=(0,0)$
- Radar 2 befinner sig i punkten: $(x,y)=(0,60)$
- Drönaren är i den okända punkten (x,y)
- Radar 1 har mätt upp avståndet 50 till målet
- Radar 2 har också mätt upp avståndet 50
- Bestäm x och y !

Två samverkande radarsystem: generalisera!

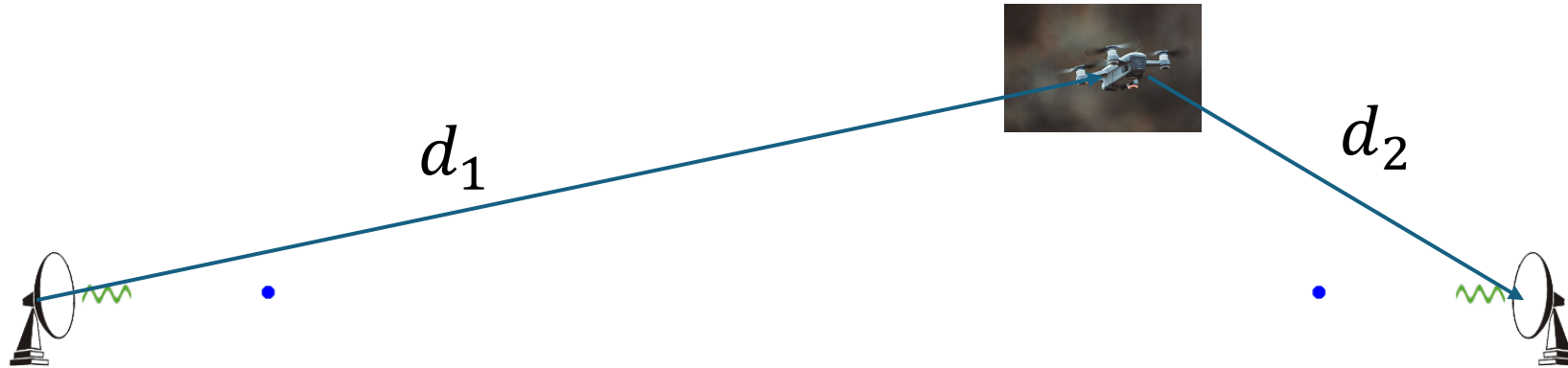


- Radar 1 befinner sig i origo: $(x,y)=(0,0)$
- Radar 2 befinner sig i punkten: $(x,y)=(0,L)$, där L är känt.
- Drönaren är i den okända punkten (x,y)
- Radar 1 har mätt upp avståndet d_1 till målet
- Radar 2 har mätt upp avståndet d_2 Givet L , d_1 och d_2 , bestäm (x,y) !

Extra utmaning: bistatisk radar

- En monostatisk radar skickar ut signalen och tar emot på samma plats. De möjliga positionerna hos ett mål på ett uppmätt avstånd ges då av en cirkel med radie lika med avståndet. Om radarn är i origo, $(0,0)$ och målet är i (x,y) så har vi $x^2 + y^2 = d^2$, där d är avståndet.
- Ett bistatiskt radarsystem skickar ut en signal från en plats som tas emot av en radar på en annan plats.
- Radarsignalen går alltså två vägar:
 - Från Radar 1 till målet, avstånd d_1
 - Från målet till Radar 2, avstånd d_2
- Om det totala uppmätta avståndet är $d = d_1 + d_2$, vilken geometrisk form bildar de möjliga positionerna hos målet?

Bistatisk radar, geometri



- Radar 1 befinner sig i origo, $(0,0)$
- Radar 2 befinner sig i $(0,L)$, där L är känt
- Radar 2 mäter upp den totala tidsfördröjningen, vilket ger det totala avståndet $d = d_1 + d_2$
- Målet befinner sig på den okända positionen (x,y)
- Visa att de möjliga positionerna x och y ges av en ellips. Bestäm ellipsens ekvation!

Kombinationer och sannolikhet

- Kombinationer och uppräknings handlar om att bestämma på hur många sätt något en viss händelse kan inträffa
- En tärning med 6 sidor har 6 olika utfall. Hur många möjliga utfall blir det om man har två tärningar?
- Uppenbarligen spelar det roll om ordningen räknas eller inte. Hur många unika utfall blir det med två tärningar, dvs om det inte spelar någon roll i vilken ordning tärningarna kommer?
- Ett kul sätt att lösa problemen är att ordna tärningarnas utfall i en kvadrat
- Vad är antal utfall om man räknar respektive inte räknar ordningen?

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Lösningar

- Kvadraten har 6 rader och 6 kolumner. Alltså har den 6×6 element. Det finns därför $6 \times 6 = 36$ möjliga utfall av två tärningskast.
- Elementen på diagonalen är unika. Varje element sydväst om diagonalen har ett likadant element på motstående sida nordost om diagonalen, men i omvänd ordning.
- Tar vi bort diagonalelementen så kan vi forma en rektangel med sidorna 6 respektive 5 av övriga element, där samtliga förekommer exakt två gånger.
- Om inte ordningen räknas så finns det då $(5 \times 6)/2 + 6$ olika utfall. Det blir alltså 21 möjliga utfall, vilket är färre än 36.

Sannolikhet

- Antag att man kastar en rättvis tärning väldigt många gånger, säg 1 miljon gånger. Varje utfall är lika sannolikt och det finns 6 möjliga utfall. Då borde det bli ungefär $1.000.000/6$ ettor och lika många tvåor, treor, fyror, femmor och sexor.
- Vi säger att sannolikheten för varje utfall är $1/6 = 1/(\text{antal utfall})$.
- Summan av alla sannolikheter är lika med ett – det blir ju alltid något utfall: $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6 = 1$
- Låt oss nu kasta två tärningar. Vi vill veta vad sannolikheten för olika utfall är:
 - Vad är sannolikheten för utfallet (6,6), dvs två sexor?
 - Vad är sannolikheten för utfallet en femma och en sexa? Här behöver vi ta hänsyn till att det finns två olika kast som ger samma utfall.

Kast med tre tärningar

- Nu går vi vidare till tre tärningar. Hur många möjliga utfall finns det om ordningen räknas?
- Det är ofta mer intressant att veta antal utfall om ordningen inte räknas. Metoden med kvadraten är inte så praktisk med tre tärningar (det skulle då bli en kub istället). Istället så sorterar vi tärningarna så att den första tärningen alltid är minst och den tredje är störst. Vi har då utfallen:
 $(1,1,1), (1,1,2), \dots, (1,1,6), (1,2,2), (1,2,3), \dots, (1,2,6), (1,3,3), \dots, (1,6,6),$
 $(2,2,2), (2,2,3), \dots, (2,2,6), \dots, (2,6,6), \dots, (6,6,6)$
- Hur många är dessa utfall?
 - Antal utfall där första tärningen är ett: $6+5+4+3+2+1$
 - Antal där första tärningen är två: $5+4+3+2+1$
 - ...
 - Antal där första tärningen är fem: $2+1$
 - Antal där första tärningen är sex: 1
 - Totalt: $6+2 \times 5+3 \times 4+4 \times 3+5 \times 2+6 \times 1=6+10+12+12+10+6=56$